МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

КІРОВОГРАДСЬКА ОБЛАСНА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
КІРОВОГРАДСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

О. М. ВОРОНИЙ

КІРОВОГРАДСЬКІ МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ ШКОЛЯРІВ 2000 – 2008 рр.

Кіровоград – 2008

ББК 22.10
В 19
УДК 51(023)

Вороний О.М.
В 19
Кіровоградські математичні олімпіади школярів 2000 – 2008 рр.: Методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 212 с.

У методичному посібнику вміщені завдання районних і міських, регіональних та обласних учнівських математичних олімпіад, що проводилися на Кіровоградщині з 2000 року по 2008 рік. До них подані відповіді, вказівки та розв’язання.

Видання розраховане на вчителів математики, студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, учнів, які цікавляться математикою.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 2 грудня 2008 року (протокол № 6).

Друкується в рамках проекту «Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини» за підтримки Управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації

ВВК 22. 10
В 19

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Щорічне проведення Всеукраїнської олімпіади юних математиків є доброю традицією народної освіти України. Вона щоразу проходить у чотири етапи: I – шкільний, II – районний та міський, III – обласний, IV – Всеукраїнський. На Кіровоградщині з 2000 року по 2007 рік другий етап проводився у два тури: I тур – районні та міські олімпіади, II тур – регіональні олімпіади.

Завдання I етапу олімпіади готуються безпосередньо в кожній школі; завдання II і III етапів – у навчально-методичному кабінеті математики обласного інституту післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського. Для обласних олімпіад 2001 і 2004 років завдання були підготовлені в науково-методичному центрі середньої освіти Міністерства освіти і науки України. В ньому також готуються завдання IV етапу олімпіади. Ці завдання та вказівки до їхнього розв'язання щорічно друкуються у фахових виданнях. Їх, зокрема, можна знайти в газеті «Математика», в журналах «У світі математики» та «Математика в школі».

Завдання районих, міських, регіональних і частини обласних олімпіад для більшості вчителів та учнів фактично залишаються невідомими. Відсутність інформації про ці етапи Всеукраїнської олімпіади створює для них певні труднощі у плані підготовки й негативно відбивається на пропаганді цього виду математичних змагань, бо саме на них відбувається найбільш масове залучення до олімпіади учнівської юні.

Методичний посібник «Кіровоградські олімпіади юних математиків 2000 − 2008 рр.» є продовженням однойменного посібника, в якому містяться завдання олімпіад 1991 – 2000 рр. Він спрямований на заповнення названої інформаційної прогалини. У посібнику поміщені завдання для VII−XI класів районних і міських, регіональних та обласних математичних олімпіад Кіровоградщини за період з 2000 по 2008 рік, а також, залежно від складності завдань, наведені відповіді до них, їхнє розв'язання або вказівки до розв'язань.

Автор сподівається, що посібник буде корисним і учням, яким подобається математика, і вчителям, що її викладають.

Автор висловлює щиру подяку В.О.Романову, доценту кафедри математики КДПУ імені Володимира Винниченка, та О.П. Макарчуку, вчителю Кіровоградської школи-гімназії №9, за цінні поради, які сприяли поліпшенню посібника.

Розділ I. УМОВИ ЗАДАЧ

2000 – 2001 навчальний рік

VII КЛАС

II етап

I тур

1. Якщо написати підряд усі натуральні числа від 1 до 18, то утвориться число 12345…1718. Доведіть, що воно ділиться на 3.

2. Тарасик і Оксана по черзі зафарбовують клітинки таблиці розміром 2000×2000. За один хід дозволяється зафарбувати будь-які дві не зафарбовані раніше клітинки, що мають спільну сторону. Починає гру Тарасик, а переможцем вважається той, після ходу якого вже не можна продовжити гру. Як слід грати Оксані, щоб завжди перемагати в цій грі?

3. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$xy = x + y.$$

4. В акваріум, довжина якого 7 дм, ширина 4 дм і висота 35 см, налили воду до рівня 30 см. Скільки літрів води налили в акваріум і скільки ще можна долити?

II тур

5. У шестицифровому числі перша цифра збігається з четвертою, друга з п'ятою і третя з шостою. Доведіть, що це число кратне числам: 7, 11, 13.

6. Розв'яжіть рівняння

$$|x - 5| + 3x = 4.$$

7. Число a складає 75% від числа b і 40% від числа c. Число c на 42 більше за число b. Знайдіть числа a і b.

8. Друкарка хоче відібрати 120 чистих аркушів паперу з пачки, кількість аркушів якої їй відома. На підрахунок одного аркуша вона витрачає 1 секунду. За який найменший час вона зробить свій відбір, незалежно від кількості аркушів у пачці?

9. З плиток доміно, розмір яких 2×4, Незнайко складає многокутники так, щоб сторони квадратів, на які поділені плитки, збігалися. Чи може Незнайко скласти многокутник, периметр якого дорівнює 102?

III етап

10. Відстань між пунктами A та B – 80 км, B та C – 300 км, C та D – 120 км, D та A – 100 км. Яка відстань між пунктами C і A?

11. За допомогою якої мінімальної кількості доданків, що містять у своєму запису лише цифру 3, можна отримати в сумі число 111111?

12. На таблиці розміщено чорні та білі шашки. За один хід дозволяється пересувати дві довільні шашки одного кольору вздовж вертикалей або вздовж горизонталей в одному або протилежному напрямках на одну клітинку. Чи можна за скінчену кількість ходів:

а) з таблиці 1 зробити таблицю 2;

б) з таблиці 3 зробити таблицю 4;

○			●
	○	●	
	●	○	
●			○

Таблиця 1

○			●
○			●
○			●
○			●

Таблиця 2

○					●
	○			●	
		○	●		
		●	○		
	●			○	
●					○

Таблиця 3

○					●
○					●
○					●
○					●
○					●
○					●

Таблиця 4

13. а) Чи можна числа 1, 2, 3, …, 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел у групах були рівними?

б) Чи можна здійснити цю процедуру для чисел 1, 2, 3, …, 999?

VIII КЛАС

II етап

I тур

1. Обчисліть значення виразу

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{20^3-1}{20^3+1}.$$

2. Школяру запропонували розв'язати 20 задач. За кожну правильно розв'язану задачу він одержує 8 балів, за кожну не правильно розв'язану задачу одержує мінус 5 балів, за задачу, яку він не розв'язував – 0 балів. У сумі учень одержав 26 балів. Скільки задач він міг розв'язувати?

3. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$xy = x + y.$$

4. У класі 30 учнів, які сидять по двоє. Щомісячно вчитель пересаджує їх так, щоб за кожною партою сиділи учні, що до цього не сиділи поруч. Скільки місяців вчитель це може робити?

II тур

5. Яке з чисел більше: $\sqrt{1999}+\sqrt{2001}$ чи $2\sqrt{2000}$?

6. Доведіть, що вираз $\dfrac{10^n+8}{9}$ є цілим числом при будь-якому натуральному n.

7. Наташа і Таня по черзі відривають пелюстки ромашки. Можна за один раз зірвати будь-яку одну або дві пелюстки, що ростуть поруч. Виграє та дівчинка, яка зриває останню пелюстку. Хто виграє, якщо на ромашці 23 пелюстки?

8. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1992.$$

9. Знайдіть усі прямокутники, сторони яких вимірюються цілими числами, а площа чисельно дорівнює периметру.

III етап

10. Розв'яжіть рівняння

$$\left||x|-2\right|=x.$$

11. Турист пройшов половину шляху між пунктами *A* і *B* зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до *B* – зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від *B* до *A* 2/3 цього шляху він пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямі від *A* до *B*, а решту шляху пройшов зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами *A* і *B*, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на весь шлях від *A* до *B*. (Вказана середня швидкість дорівнює відношенню відстані від *A* до *B* до всього часу руху в напрямі від *A* до *B*.)

12. Чи існують цілі числа k і l такі, що

$$k^3+l^3=2001?$$

13. На сторонах *AB*, *BC*, *CD*, *DA* квадрата *ABCD* вибрали точки *M*, *P*, *N*, *Q* відповідно так, що відрізки *MN* і *PQ* перпендикулярні. Нехай *O* – точка перетину відрізків *MN* і *PQ*. Доведіть, що $P_{AMOQ}+P_{CPON}=P_{BMOP}+P_{DNOQ}$, де P_F позначає периметр фігури *F*.

14. Дано одну купу з 2001-го сірника. Двоє грають у таку гру. Вони по черзі роблять такі ходи – вибирається довільна купа, що містить більше одного сірника і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві записується добуток чисел сірників в отриманих двох нових купах. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилася на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

IX КЛАС

II етап

I тур

1. Обчисліть значення виразу

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{100^3-1}{100^3+1}.$$

2. Побудуйте графік функції

$$y=x+\{x\}+[x]+3|x|.$$

3. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$x^2+2000=y^2.$$

4. До даного кола, діаметр якого $AB=2R$, проведено дотичну *BM*. Знайдіть на цьому колі таку точку *N*, щоб довжина відрізка *NA* дорівнювала відстані точки *N* до дотичної *BM*.

II тур

5. Доведіть, що сума $2+2^3+2^5+\ldots+2^{99}$ ділиться на 5.

6. Побудуйте графік функції

$$y=\frac{\{x\}-1}{\{x\}+1}.$$

7. Для кожного значення *a* знайдіть розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}x+y=a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

і дайте геометричну інтерпретацію одержаного розв'язку.

8. На столі лежить 1978 сірників. Два хлопчики по черзі можуть брати 1 чи 2 сірники. Виграє той, хто візьме останній сірник. Який хлопчик виграє і як він повинен грати?

9. Чи існує трикутник, у якого всі висоти менші за 1 см, а площа більша за 100 см^2?

III етап

10. Доведіть нерівність:

$$\frac{|a|}{\sqrt{b}}+\frac{|b|}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

11. Розв'яжіть систему рівнянь

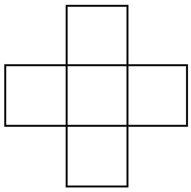
$$\begin{cases}x|x|+y|y|=1,\\ [x]+[y]=1.\end{cases}$$

(Тут символом [n] позначено найбільше ціле число, яке не перевищує n).

12. Два рівних квадрати утворюють при перетині восьмикутник. Дві діагоналі цього восьмикутника поділяють його на 4 чотирикутники. Доведіть, що ці діагоналі перпендикулярні одна до одної.

13. На колі зафіксовано дві точки, а третя рухається по цьому колу. Знайдіть геометричне місце точок перетину медіан трикутника, вершини якого розташовані у цих точках.

14. Із паперу в клітинку вирізали квадрат 8×8. Яку найбільшу кількість фігур, зображених на малюнку, можна вирізати з цього квадрата?



X КЛАС

II етап

I тур

1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Через середину меншого катета й середину гіпотенузи проведено коло так, що воно дотикається до гіпотенузи. Обчисліть площу круга.

2. Доведіть, що $2^{3^n} + 1$ при будь-якому натуральному *n* ділиться на 3^{n+1}.

3. Відомо, що натуральне число *n* не є точним квадратом. Доведіть, що для дробової частини числа $\sqrt{n}$ виконується нерівність

$$\left\{\sqrt{n}\right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

4. Є 5 різних ключів, кожний з яких підходить лише до одного з п’яти замків. Яку найменшу кількість спроб потрібно зробити, щоб напевно знайти для кожного замка відповідний ключ?

II тур

5. Знайдіть суму

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}.$$

6. Для кожного значення параметра *a* визначіть кількість розв’язків системи рівнянь

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

і дайте геометричну інтерпретацію.

7. Відстань від А до В складає 999 км. Уздовж дороги стоять кілометрові стовпи, на яких відстань від А до В написана так:

0 999, 1 998, 2 997, … 999 0.

Скільки серед цих стовпів таких, на яких є тільки дві різні цифри?

8. Знайдіть усі неперервні на числовій прямій функції такі, що для кожного $x \in \mathbf{R}$ виконується рівність

$$f\left(f(x)\right) = 2000 - x .$$

9. Знайдіть усі прямокутні паралелепіпеди, сторони яких вимірюються цілими числами, а об'єм чисельно дорівнює площі його поверхні і в чотири рази більший за суму довжин усіх його ребер.

III етап

10. Для кожного натурального *n* розв'яжіть рівняння

$$\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \sin 3x \sin 9x + \ldots + \sin nx \sin n^2 x = 1.$$

11. Для кожного натурального числа *n* позначимо $a(n) = n^2 + n + 1$. Через *S* позначимо множину всіх значень $a(n), n \geq 1$.

а) Доведіть, що для кожного натурального *n* число $a(n)a(n+1)$ належить *S*.

б) Доведіть, що існують *n* і *k* більші за 2001 такі, що число $a(n)a(k)$ не належить *S*.

12. Доведіть, що для будь-яких цілих чисел *a, b, c, d, e* виконується нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq (a+b+c+d)e.$$

13. П'ятикутник *ABCDE* вписаний у коло. Відомо, що промені *AE* і *CD* перетинаються в точці *P*, а промені *ED* і *BC* перетинаються в точці *Q* так, що $PQ||AB$. Доведіть, що $DA = DB$.

14. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану в чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершинах (протилежним для чорного вважається білий колір, а для білого кольору – чорний). Чи можна за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

XI КЛАС

II етап

I тур

1. Через точку M бісектриси прямого кута проведена довільна пряма, яка на сторонах кута відтинає відрізки довжиною a та b. Доведіть, що величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не залежить від положення цієї прямої.

2. Доведіть, що $2^{3^n} + 1$ при будь-якому натуральному *n* ділиться на 3^{n+1}.

3. Натуральні числа 1, 2, ..., 2000 у порядку зростання записано по колу за годинниковою стрілкою. За кожним обходом кола за годинниковою стрілкою будемо закреслювати кожне друге число, яке не було закреслене раніше, до тих пір, поки залишиться одне число. Яке число залишиться?

4. Розв'яжіть рівняння

$$|tgx + ctgx| = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

II тур

5. Знайдіть усі дійсні розв'язки рівняння

$$x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0.$$

6. Доведіть нерівність

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2,$$

де $n \in N, \quad \alpha \geq 0.$

7. Побудуйте графік функції

$$y = \left|\frac{\{x\}-1}{\{x\}+1}\right|.$$

8. Знайдіть суму

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}.$$

9. Знайдіть прямокутний паралелепіпед, сторони якого вимірюються цілими числами, а об'єм чисельно дорівнює його повній поверхні і в чотири рази більший за суму довжин усіх його ребер.

III етап

10. Для кожного натурального числа n розв'яжіть рівняння

$$\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \sin 3x \sin 9x + ... + \sin nx \sin n^2 x = 1.$$

11. Числова послідовність $a_1, a_2, a_3, ...,$ в якій $a_1 = 2, a_2 = 500,$ $a_3 = 2000,$ при всіх натуральних $n \geq 2$ задовольняє умову

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}.$$

Доведіть, що всі члени послідовності є натуральними числами, причому a_{2001} ділиться без остачі на 2^{2001}.

12. Знайдіть усі функції f, які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x, y \in \mathbf{R}$ виконується рівність

$$f(y + f(x)) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

13. Поза площиною α дано точку A. Доведіть, що для будь-якої прямої l, яка належить площині α, у цій же площині існує така відмінна від l пряма

$m \parallel l$, що для кожної точки $M \in m$ спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l та AM проходитиме через середину відрізка AM.

14. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану в чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин (протилежним для чорного вважається білий колір, а для білого кольору – чорний). Чи можна за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

2001 – 2002 навчальний рік

VII КЛАС

II етап

I тур

1. Петрик і Василько за три дні купили 18 марок. Сьогодні Петрик купив стільки марок, скільки Василько купив за два останні дні. Але позавчора він купив на дві марки більше, ніж Петрик за перші два дні. Скільки марок купив кожен?

2. На кожній клітинці дошки розміром 9×9 сидить жук. Потім усі жуки переповзають на сусідні клітинки. (Сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону). Доведіть, що знайдеться клітинка, на якій буде щонайменше два жуки.

3. Теплохід проплив 9 км озером і 20 км за течією річки за 1 годину. Яка власна швидкість теплохода, якщо швидкість річки 3 км/год?

4. Розв’яжіть рівняння

$$|2x| - 3x = 25.$$

5. Знайдіть довжини сторін рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 124 см, а основа більша за бічну сторону на 10 см.

II тур

6. Незнайко похвалився, що йому вдалося так зафарбувати клітинки таблиці розміром 2000×2001, що в кожному рядку червоних клітинок більше, ніж білих, а в кожному стовпчику білих клітинок більше, ніж червоних. Але забув як це зробити. Допоможіть Незнайці.

7. Довести, що коли $|a| < 1$ і $|b| < 1$, то $1 + ab > a + b$.

8. У рівності $\overline{2ab1} : 13 = \overline{c2d}$ поновіть цифри, які замінені буквами.

9. Яке з чисел більше: 31^{11} чи 17^{14}?

III етап

10. Доведіть, що добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100$ ділиться на 3^{48}.

11. На площині відмічено 50 точок. Відомо, що ніякі три з них не лежать на одній прямій. Через кожні дві з них проведено пряму. Скільки всього проведено прямих?

12. На паперовій стрічці написане число 121212...121212, у якому 1980 цифри. На яке найбільше число частин можна розрізати цю стрічку, щоб усі числа на отриманих при цьому частинах стрічки були рівними?

13. Розв'яжіть рівняння

$$|x+2| + |2x+3| + |x-1| + |x-3| - 3x + 12 = 0.$$

14. Чи можна кубик розміром $1 \times 1 \times 1$ загорнути у квадратну хустину розміром 3×3?

VIII КЛАС

II етап

I тур

1. Знайдіть усі цілі невід'ємні розв'язки рівняння

$$20x + y = 2001.$$

2. Доведіть, що для кожного натурального числа n число $3^{2n+2} - 8n - 9$ ділиться на 64.

3. Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 4 частини, потім деякі з цих четвертинок знову розрізали на 4 частини і т.д. Підрахувавши всі отримані клаптики паперу, отримали число 2001. Чи правильно зробили підрахунок?

4. У трапеції $ABCD$ сума кутів біля основи AD дорівнює 90°. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини основ трапеції, дорівнює піврізниці основ.

5. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x^2}{15(x-10)} - \frac{x-30}{30-3x} = 1.$$

II тур

6. Розкладіть на множники

$$x^{10} + x^5 + 1.$$

7. Доведіть, що число 101010 не можна подати як різницю квадратів двох цілих чисел.

8. У рівносторонньому трикутнику ABC на сторонах AB, BC, CA відмітили точки M, K, P відповідно так, що

$$AM : MB = BK : KC = CP : PA = 2 : 3.$$

Доведіть, що трикутник MKP також рівносторонній.

9. Обчисліть

$$\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

III етап

10. Розкладіть на множники

$$x^4+1.$$

11. Розв’яжіть рівняння

$$\frac{1}{x}=\frac{b}{a-x},$$

де a і b деякі числа.

12. Спростіть вираз

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}},$$

якщо $1\le x\le 2$.

13. З вершини гострого кута паралелограма проведено висоти. Доведіть, що кут між висотами дорівнює тупому куту паралелограма.

14. Яке найбільше число понеділків може бути в одному році?

IX КЛАС

II етап

I тур

1. Розв’яжіть рівняння у цілих числах

$$6x^2+5y^2=74.$$

2. A – довільна внутрішня точка правильного п’ятикутника. Доведіть, що сума відстаней точки A до кожної сторони п’ятикутника є величина стала.

3. На папері в рядок записано 25 знаків «–» Двоє хлопчиків по черзі замінюють один або два сусідні знаки «–» знаком «+». Виграє той, хто замінить останній знак «–». Хто виграє в цій грі і як йому треба діяти?

4. Порівняйте числа $\sqrt{2000}+\sqrt{2002}$ і $2\sqrt{2001}$.

5. Розв’яжіть рівняння

$$\frac{4}{x^2-6x+9}-\frac{6}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}.$$

II тур

6. Для яких значень параметра a корені рівняння

$$x^2-(2a+1)x+a^2=0$$

відносяться як 1:4?

7. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC ділить навпіл відрізок, що сполучає середини сторін AB і CD. Доведіть, що вона ділить навпіл і діагональ BD.

8. Обчисліть значення виразу $x^{26} + \frac{1}{x^{26}}$, якщо $x^2 + x + 1 = 0$.

9. Доведіть, що число $1+\sqrt{3}$ не можна подати як квадрат числа $a+b\sqrt{3}$, де a і b – раціональні числа.

III етап

10. Знайдіть усі прямокутні трикутники, довжини сторін яких вимірюються цілими числами, а периметр дорівнює 40 см.

11. Побудуйте графік функції

$$y = \left||x-1|-2\right|.$$

12. Доведіть, що значення виразу $x^2 + y^2$, де x і y – цілі числа, не може бути числом, яке при діленні на 4 дає остачу 3.

13. Розв'яжіть рівняння

$$2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1.$$

14. Прямокутник $HOMP$ має сторони $HO = 11, OM = 5$. У трикутнику ABC точка H – перетин висот, O – центр описаного кола, M – середина BC, P – основа висоти, опущеної з вершини A на сторону BC. Знайдіть довжину BC.

X КЛАС

II етап

I тур

1. Знайдіть суму

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}.$$

2. Розв'яжіть рівняння

$$\left|[x]\right| + \left[|x|\right] = a,\ a \in \mathbf{R}.$$

3. Обчисліть площу чотирикутника $ABCD$, у якого сторони $AB \perp CD$, $AB = 12\ см, BC = 17\ см, CD = 4\ см, DA = 5\ см.$

4. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{2x+5}{x+3}.$$

5. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її четвертий, п'ятий і сьомий члени утворюють арифметичну прогресію.

II тур

6. Знайдіть розв'язки рівняння

$$|\sin(2x-1)| = \cos x$$

що містяться на відрізку $[-2\pi; 2\pi]$.

7. Доведіть, що за умови $2x + 5y = 10$ виконується нерівність

$$3xy - x^2 - y^2 < 7.$$

8. Через точку, що належить стороні трикутника, провели дві прямі, які паралельні відповідно двом іншим сторонам. Ці прямі від даного трикутника відділили два трикутники, площі яких дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть площу даного трикутника.

9. Обчисліть суму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{14\cdot 15\cdot 16}.$$

III етап

10. Розв'яжіть рівняння

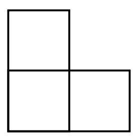
$$x^2 + |x-2| + |x| + |x+2| + |x-3| + |x+3| - 4 = 0.$$

11. Доведіть нерівність

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2, \quad n \in N, x \geq 0.$$

12. Знайдіть периметр трикутника найбільшої площі, утвореного більшою основою і продовженням бічних сторін трапеції, якщо відомо, що довжина верхньої основи удвічі менша за нижню основу, а діагоналі дорівнюють 5 і 6.

13. З шахівниці розміром 8×8 вилучили одну клітинку. Доведіть, що частину шахівниці, яка залишилася, можна покрити такими триклітинковими фігурками:



Чи можна це зробити на шахівниці 9×9?

14. Побудуйте множину точок координатної площини, координати яких задовольняють рівність

$$|y| = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2},$$

де $\{x\}$ – дробова частина числа x.

XI КЛАС

II етап

I тур

1. Доведіть, що для кожного натурального числа n значення виразу $3^{2n+2} - 8n - 9$ ділиться на 64.

2. Гра починається з числа 10. Два учні роблять ходи почергово. За один хід дозволяється помножити це число на будь-яке натуральне число від 2 до 9 включно. Виграє той, хто перший отримає число, яке більше за 2001. У кого з гравців є виграшна стратегія?

3. У правильному n-кутнику ($n > 5$) різниця між найбільшою і найменшою діагоналями дорівнює його стороні. Знайдіть n.

4. Доведіть нерівність

$$\cos 2001 < 1 + \cos 2000.$$

5. Розв'яжіть рівняння

$$\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = 2 - \lg 25.$$

II тур

6. Скільки дійсних коренів має рівняння

$$x^5 - 5x = a$$

при заданому a?

7. Знайдіть площу прямокутного трикутника, в якого гіпотенуза дорівнює c, а сума синусів гострих кутів – m.

8. Доведіть нерівність

$$\sqrt{2(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{1}{8}\sqrt{(a+b+c)^3},$$

якщо a, b, c – сторони, а p – півпериметр трикутника.

9. Знайдіть усі прямокутні паралелепіпеди з цілими сторонами, у яких об'єм чисельно дорівнює периметру основи.

III етап

10. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 10.$$

11. Розв'яжіть нерівність

$$\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} \ge 0.$$

12. Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right).$$

13. У правильній трикутній призмі через дві вершини верхньої основи і середини протилежних сторін нижньої основи проведено прямі, кут між якими дорівнює α. Знайдіть висоту призми, якщо довжина сторони основи дорівнює a.

14. На дошці записані одне за одним числа 7, 5, 5, 7. Потім за ними записують останню цифру суми цих чисел, а перше число витирають. Таку ж дію виконують з утвореною четвіркою чисел, потім – з новою четвіркою і т.д. Чи можна, виконуючи такі дії, на деякому кроці отримати числа 1, 9, 8, 9?

2002 – 2003 навчальний рік

VII КЛАС

II етап

I тур

1. Сума двох чисел дорівнює 682. Одне з них закінчується нулем. Якщо цей нуль закреслити, то утвориться перше число. Знайдіть ці числа.

2. Поїзд їхав зі швидкістю 40 км/год. Пасажир зауважив, що зустрічний поїзд проїхав повз нього за 3 секунди. Визначіть швидкість зустрічного поїзда, якщо відомо, що його довжина 100 м.

3. Ціну товару підвищили на 25%. На скільки відсотків потрібно знизити нову ціну, щоб одержати початкову?

II тур

4. Доведіть, що сума відстаней внутрішньої точки трикутника до його сторін є постійною величиною.

5. Хвіст рибини важить 0,2 кг, голова – стільки, скільки хвіст і половина тулуба, а тулуб – скільки голова і хвіст разом. Скільки важить рибина?

6. Два гравці по черзі ставлять на клітинки дошки розміром 9×9 по одній фішці. При цьому в жодній вертикалі і в жодній горизонталі не повинно бути більше двох фішок. Той гравець, який не може зробити свій хід – програє. Хто виграє при правильній грі?

7. У Петрика була коробка розміром $3 \times 4 \times 5$. Після того, як він змінив усі розміри коробки на однакове число одиниць, об’єм коробки збільшився на 1260 кубічних одиниць. На скільки одиниць Петрик змінив розміри коробки?

III етап

8. Клітинки смужки розміром 1×24 пронумеровані послідовними натуральними числами. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві сусідні, де перша з них парна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник?

9. Доведіть, що для будь-яких натуральних чисел m і n вираз $m^2 + n^2 + m - n$ ділиться на 2.

10. Як розрізати квадрат зі стороною 4 см на прямокутники, щоб сума їхніх периметрів дорівнювала 25 см?

11. Чи може у країні, в якій із кожного міста виходить 8 доріг, бути 226 доріг?

VIII КЛАС

II етап

I тур

1. Сума чисельника і знаменника дробу дорівнює 4140. Знайдіть цей дріб, якщо після його скорочення одержали $\frac{7}{13}$.

2. Є чотири послідовні цілі числа. Доведіть, що добуток середніх чисел, більший за добуток крайніх чисел на 2.

3. Гіпотенуза прямокутного трикутника у 4 рази довша за проведену до неї висоту. Знайдіть величину гострих кутів трикутника.

4. Довжини сторін прямокутника $2a$ і $3a$. Знайдіть периметр чотирикутника, утвореного при перетині бісектрис кутів прямокутника.

II тур

5. Доведіть, що для простого числа p, яке більше за 2, число $p^2 - 1$ ділиться на 8.

6. Розв’яжіть рівняння

$$(x+5)^4 + (x+3)^4 = 16.$$

7. Доведіть, що для всіх точок, які містяться усередині правильного трикутника, сума відстаней від точки до сторін трикутника є постійною величиною.

8. Бісектриси трикутника ABC перетинаються в точці M, а коло, описане навколо нього, перетинають в точках D, E, K. Доведіть, що M – точка перетину висот трикутника DEK.

III етап

9. Доведіть, що $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}} = \underbrace{33\ldots3}_{n}.$

10. У квадрат, сторона якого дорівнює 1 м, кинули 53 точки. Доведіть, що якісь три з них можна накрити квадратом зі стороною 20 см.

11. Доведіть, що для будь-яких чисел a, b, c завжди виконується нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c).$$

12. Відомо, що x і y додатні числа, причому $x + y = 2003$. Знайдіть найбільше значення добутку xy. Для яких x і y цей добуток найбільший?

13. Чи можна стверджувати, що чотирикутник – ромб, у якого діагоналі перпендикулярні? Відповідь пояснити.

IX КЛАС

II етап

I тур

1. При яких значеннях a і b вираз

$$A = 2a^2 - 8ab + 17b^2 - 16a - 4b + 2044$$

набуває найменшого значення?

2. Доведіть, що

$$(a - x)(a - y)(a - z) > 8xyz,$$

де x, y, z – додатні числа і $x + y + z = a.$

3. У трикутнику ABC відомі довжини медіан. Знайдіть довжини його сторін.

4. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^3 - x}{x - 1}.$$

5. Яку найбільшу кількість комплектів шахів вартістю 5 гривень і 8 гривень можна придбати за 103 гривні?

II тур

6. Побудуйте лінію, задану рівнянням

$$x^2 + y^2 = 2|x|.$$

7. При яких значеннях a рівняння

$$(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0,$$

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

мають спільний корінь?

8. Подайте многочлен $xy + y$ у вигляді різниці квадратів.

9. Бісектриси кутів A і С трикутника ABC перетинають описане навколо нього коло у точках E і D відповідно. Відрізок DE перетинає сторони AB і BC у точках P і M. Якщо K – точка перетину бісектрис даного трикутника, то $BPKM$ – ромб. Доведіть.

III етап

10. Відомо, що x_1 і x_2 – дійсні корені рівняння

$$(3a-1)x^2+(3a-1)x+a^2=0.$$

Для яких значень параметра a виконується рівність $x_1^3+x_2^3=-1$?

11. Знайдіть найбільшу відстань між двома точками площини, координати яких задовольняють рівність

$$|2003-x|+|2003-y|=2003.$$

12. Діаметр кола поділено на 4 однакові частини. На колі взяли довільну точку M. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки M до точок поділу (разом з кінцями діаметра) не залежить від вибору цієї точки. Обчисліть цю суму, якщо радіус кола дорівнює r.

13. Якщо a, b, c – довжини сторін трикутника, то $a^3+b^3+3abc>c^3$. Доведіть.

14. Знайдіть розв'язки у цілих числах рівняння

$$x^3-x=y^2-19y+98.$$

X КЛАС

II етап

I тур

1. Побудуйте графік функції

$$y=|1-x|+|1+x|+x^2.$$

2. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 2 м, а кут між рівними медіанами – $90°$.

3. Для додатних a і b доведіть нерівність

$$\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}.$$

4. Знайдіть площу трапеції, довжини основ якої дорівнюють 24 см і 78 см, а кути біля більшої основи мають $30°$ і $60°$.

5. Розв'яжіть рівняння

$$x^2+2^{[x]}=2,$$

$[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.

II тур

6. Розв'яжіть рівняння

$$x^3-2x+1=0.$$

7. Побудуйте графік рівняння

$$|y|=[|x|-1].$$

($[a]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує a).

8. Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що різниця прогресії дорівнює радіусу вписаного кола.

9. Периметр трикутника дорівнює p. Визначіть сторони трикутника так, щоб сума відстаней центра описаного кола до сторін трикутника була найбільшою.

III етап

10. Знайдіть усі пари дійсних чисел, які задовольняють рівність

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

11. Розв'яжіть рівняння

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0.$$

12. Доведіть, що сума квадратів довжин медіан довільного трикутника не менша за квадрат його півпериметра.

13. У новосформованому 10 класі деякі учні були вже знайомими, а деякі – ні. У перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було кинуто 117 замріяних поглядів. Скільки у класі хлопців і скільки дівчат, якщо їх разом не більше 40?

14. Дві різні паралельні проекції просторової замкненої ламаної $MKPT$ на одну й ту саму площину є паралелограми. Чи можна стверджувати, що $MKPT$ – паралелограм?

XI КЛАС

II етап

I тур

1. Побудуйте графік функції

$$y = \left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

2. Один з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині α, а гіпотенуза нахилена до цієї площини під кутом $30°$. Знайдіть кут між іншим катетом і площиною α.

3. Розв'яжіть рівняння

$$|\lg(x-2)| - |\lg(x+3) - 1| = \lg 2.$$

4. Знайдіть ті значення a, для яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 - ax + a - 1 = 0$$

буде найменшою.

5. Рівносторонній трикутник ABK розміщений зовні ромба $ABCD$. Знайдіть кут CKD.

II тур

6. Доведіть нерівність

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

для гострих кутів α і β.

7. Розв'яжіть рівняння

$$f\Big(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\Big) = x,$$

якщо $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

8. Основою піраміди є паралелограм зі сторонами 16 і 20. Відстань від вершини піраміди до точки перетину діагоналей основи дорівнює 4. Знайдіть довжини бічних ребер піраміди, якщо вони вимірюються цілими числами й ці числа утворюють арифметичну прогресію.

9. Побудуйте на координатній площині точки $(x; y)$, для координат яких виконується рівність

$$\left(\frac{\sin x + \sin y}{2}\right)^3 = \frac{\sin^3 x + \sin^3 y}{2}.$$

III етап

10. Обчисліть значення виразу

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + ... + \sin 2003x,$$

якщо $\cos 2004x + 2\sin x = 1$.

11. Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника, а S – його площа. Доведіть, що

$$S \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$$

12. Для яких значень параметра a відрізок $[0; 1]$ належить області значень функції

$$f(x) = \frac{3ax}{x^2 + x + 1} + a^2 - 2?$$

13. Знайдіть цілі корені рівняння

$$f\Big(f\Big(f\big(\sqrt{x}\big)\Big)\Big) = \sqrt{x},$$

де $f\big(\sqrt{x}\big) = x + 2\sqrt{x} - 2$.

14. Бісектриси кутів A і C трикутника ABC перетинаються у точці L, а описане навколо нього коло перетинають у точках E і D відповідно. Відрізок DE перетинає сторони AB і BC у точках F і Q. Доведіть, що $BFLQ$ – ромб.

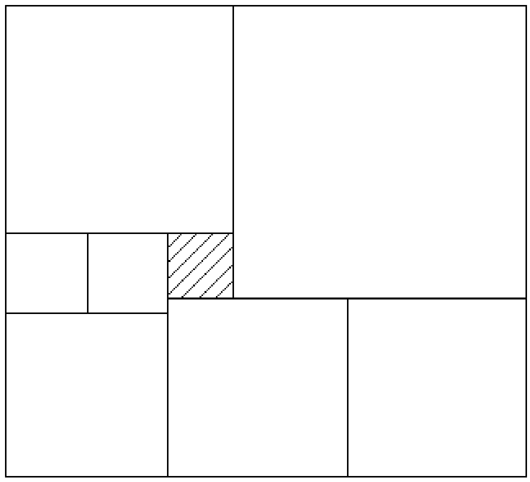
2003 – 2004 навчальний рік

VII КЛАС

II етап

I тур

1. Прямокутник, що міститься на малюнку, складається з квадратів. Довжина сторони заштрихованого квадрата дорівнює 4. Яка довжина сторін прямокутника?



2. Знайдіть усі значення числа $a, a \neq 5,$ при яких корінь рівняння

$$ax = a + 5x,$$

кратний 3.

3. На шахівницю 8×8 поклали 8 квадратиків 2×2 так, що кожний з них накриває тільки 4 клітинки дошки, а жодні два з квадратиків не накладаються один на одного. Довести, що в такий спосіб на шахівницю можна покласти ще один квадратик.

4. Відомо, що проміж дев'яти монет є одна фальшива (легша за інші). За яку найменшу кількість зважувань на терезах з двома шальками її можна виявити?

II тур

5. Кожна літера позначає цифру. Однаковими літерами позначено одну й ту ж цифру. Які цифри використані для запису рівності **АБВГ+АБДГ=ВГДАГ**?

6. Знайдіть усі трицифрові числа, які в 13 разів більші за суму своїх цифр.

7. Спростіть вираз

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1).$$

8. У десяти однакових мішках однакова кількість однакових на вигляд монет. У дев'яти мішках монети по 1 г, а в одному – по 2 г. Як за допомогою одного зважування на електронних торгових вагах визначити мішок, у якому містяться двограмові монети?

III етап

9. Розв'яжіть рівняння

$$\left|\left|4|x|-3\right|-2\right|=3.$$

10. Із селища A до селища B виїхав велосипедист, а через 15 хвилин услід за ним виїхав автомобіль (велосипедист та автомобіль рухаються з постійною швидкістю). Рівно на половині шляху від A до B автомобіль наздогнав велосипедиста. Коли автомобіль прибув до селища B, велосипедистові залишилося проїхати ще третину шляху. За який час велосипедист подолав шлях від селища A до селища B?

11. Дано прямокутний трикутник $ABC\ (\angle A < 45°, \angle C = 90°)$, на сторонах AC і AB якого обрано точки D і E відповідно так, що $BD = AD$ і $CB = CE$. Відрізки BD і CE перетинаються в точці O. Доведіть, що $\angle DOE = 90°$.

12. Троє учнів, котрі відвідували заняття математичного гуртка, на перерві вирішили пограти в „слова". Кожен з них записав 50 різних слів. Потім слова, які зустрічалися принаймні у двох учнів, викреслили. Після цього в першого залишилося 23 слова, у другого 32 слова, а в третього учня – 26 слів. Учитель математики, дізнавшись про це, сказав дітям, що щонайменше одне слово було записане в усіх трьох учнів. Як учитель зумів зробити такий висновок?

13. Як у виразі

$$\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\frac{4}{5}*\cdots*\frac{97}{98}*\frac{98}{99}*\frac{99}{100},$$

що містить 90 дробів, замінити всі зірочки знаками арифметичних дій так, щоб значення одержаного виразу дорівнювало нулеві?

14. Петрик вибрав три різні цифри a, b і c $(a \neq b \neq c \neq a)$ й записав усі можливі трицифрові натуральні числа, десятковий запис кожного з яких містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. З'ясувалося, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри були вибрані, й доведіть, що інших варіантів немає.

15. Дано горизонтальну клітчату смугу розміром 1×2004. Нехай у кожній з п'яти крайніх зліва клітинок розташовано по одній фішці. Двоє гравців по черзі беруть одну з фішок і пересувають її на декілька клітинок праворуч (стрибати через фішки й ставити фішки в клітинки, в яких уже містяться інші фішки, не дозволяється). Переможеним визнається той з гравців, який не може зробити свій черговий хід. Доведіть, що гравець, який розпочинає гру, може забезпечити собі перемогу.

VIII КЛАС

II етап

I тур

1. Відомо, що $2x+3y$ при деяких натуральних значеннях x та y ділиться на 17. Довести, що при цих значеннях x та y вираз $9x+5y$ також ділиться на 17.

2. На площині дано три точки A, B та H. Побудуйте точку C так, щоб H була точкою перетину висот трикутника ABC.

3. Чи можна на колі розставити 13 натуральних чисел так, щоб кожне з них було сумою або різницею сусідніх?

4. Розв'яжіть в натуральних числах рівняння

$$55\left(x^3y^3+x^2+y^2\right)=229\left(xy^3+1\right).$$

II тур

5. При яких значеннях m нерівність

$$mx^2+(2-m)x+3-2m\le 0$$

виконується тільки для одного дійсного значення x?

6. Турист вирушив з турбази на байдарці о 10 год 15 хв і повинен повернутися не пізніше 13 год того ж дня. Відомо, що швидкість течії 1,4 *км/год*, а швидкість байдарки у стоячій воді 3 *км/год*. На яку максимальну відстань турист може відпливти від турбази, якщо через кожні 30 хв веслування він 15 хв відпочиває, не пристаючи до берега, і може повернути назад тільки після відпочинку.

7. Відомо, що в трапецію можна вписати коло. Доведіть, що кола, які побудовані на її бічних сторонах як на діаметрах, дотикаються одне одного.

8. У кожній клітинці дошки 5×5 сидить жук. У деякий момент всі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі чи вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишаться порожні клітинки?

III етап

9. Побудуйте графік функції

$$y=\frac{5x^2-|x|}{x+|x|}.$$

10. Сума тангенса гострого кута та котангенса іншого гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Обчисліть значення тангенса більшого гострого кута цього трикутника.

11. Для яких натуральних n число $n^4 - 22n^2 - 46$ ділиться без остачі на $n+5$?

12. Розв'яжіть рівняння

$$\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = p,$$

де p – середнє арифметичне чисел

$$A = \frac{158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2}{158 + 185}, \quad B = \frac{158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2}{185 - 158}.$$

13. Знайдіть натуральне число B за умови, що з трьох наступних тверджень два істинні, а одне хибне:

1) $B + 41$ є квадратом натурального числа;

2) $B - 21$ ділиться на 10;

3) $B - 48$ є квадратом натурального числа.

14. За допомогою циркуля та лінійки поділіть кут $35°$ на 7 рівних частин.

15. ABC – рівнобедрений трикутник з основою AC. На бічній стороні BC вибрано точку K так, що $\angle BAK = 24°$. На відрізку AK вибрана точка M так, що $\angle ABM = 90°$, $AM = 2BK$. Визначіть кути трикутника ABC.

IX КЛАС

II етап

I тур

1. Доведіть, що число $\underbrace{11\ldots1}_{n\ цифр}2\underbrace{11\ldots1}_{n\ цифр}$ – складене.

2. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}.$$

3. Розв'яжіть рівняння

$$[x] + \{x\} + 1 = x|x|,$$

де $[x]$ – ціла частина, $\{x\}$ – дробова частина числа x.

4. Знайдіть значення виразу

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 - (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

II тур

5. Доведіть, що число $x + 7y$ ділиться на 31, якщо x та y – цілі числа і $6x + 11y$ ділиться на 31.

6. Доведіть нерівність

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2.$$

7. У рівносторонній трикутник ABC вписане півколо з центром O на стороні AB. Деяка дотична до півкола перетинає сторони BC і AC відповідно в точках M і N, а пряма, що з'єднує точки дотику сторін BC та AC з півколом, перетинає відрізки OM та ON у точках P і Q. Доведіть, що $MN = 2PQ$.

8. Скількома цифрами записане число $11\ldots1$, якщо воно ділиться на 41?

III етап

9. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^5 + x^3 + x - 42} = x\sqrt{2 - x}.$$

10. На декартовій координатній площині задані чотири точки: $A_1(0; 0)$, $A_2(0; 2)$, $A_3(-2;-2)$, $A_4(4; 0)$. Для кожної точка A_i вказати множину точок площини, для яких вона є найближчою серед інших трьох точок.

11. Знайдіть усі $x_0 < 3$ такі, що для деяких натуральних чисел a, b, c число x_0 є більшим коренем рівняння $(a - x)(b - x) = c$.

12. Знайдіть усі натуральні числа n такі, що в десяткових записах чисел $6n, 9n, 13n$ всі цифри від 0 до 9 зустрічаються по одному разу.

13. Деякі сторони клітинок шахівниці пофарбовано в червоний колір, а інші – в синій. Дозволяється обрати деяку клітинку дошки та одночасно перефарбувати всі її сторони у протилежний колір. Чи завжди можна зробити декілька перефарбувань так, щоб синіми стала четверта частина сторін від усієї кількості сторін клітинок?

14. Нехай додатні числа a, b, c та дійсні числа x, y, z такі, що

$$ax + by + cz = 0.$$

Доведіть нерівність

$$\left(a + \sqrt{ab} + b\right)xy + \left(b + \sqrt{bc} + c\right)yz + \left(c + \sqrt{ca} + a\right)zx \le 0.$$

15. На дошці побудовано трикутник ABC. Висота AH та бісектриса AL цього трикутника перетинають уписане в трикутник коло в різних точках M та N, P та Q. Після цього малюнок витерли, залишивши тільки точки H, M та Q. Відновіть трикутник ABC.

X КЛАС

II етап

I тур

1. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 2y^2 - 12 = 0, \\ 3x + xy - y^2 - 3y = 0. \end{cases}$$

2. У прямокутному трикутнику довжини медіани й висоти, які проведені до гіпотенузи, дорівнюють m і h відповідно. Обчислити довжину бісектриси прямого кута цього трикутника.

3. Знайти всі функції $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такі, що:

а) $f(1)=1$;

б) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ для всіх $x, y\in\mathbf{N}$.

4. Сума номерів будинків одного кварталу по одній стороні дорівнює 235. Укажіть номери будинків цього кварталу.

ІІІ тур

5. Виключіть параметр t з системи рівнянь

$$\begin{cases}\cos(x+3t)=y\cos^3 t,\\ \sin(x+3t)=-y\sin^3 t.\end{cases}$$

6. M – точка перетину двох кіл з центрами O_1 та O_2, точки A та B лежать відповідно на першому та другому колах і $\angle AMB=90°$. Доведіть, що вираз $AO_2^2+BO_1^2-AB^2$ не залежить від вибору точок A та B.

7. Знайдіть цілу частину виразу

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\cdots+\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}.$$

8. Дано функцію $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Знайдіть суму

$$f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{1}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{2}\right)+\cdots+$$

$$+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{100}\right).$$

ІІІ етап

9. Нехай α,β,γ – такі гострі кути, що

$$\cos\alpha=tg\beta, \cos\beta=tg\gamma, \cos\gamma=tg\alpha.$$

Доведіть, що

$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

10. Нехай α – таке дійсне число, що $\alpha^2+\alpha$ і $\alpha^3+2\alpha$ є раціональними числами. Доведіть, що число α також раціональне.

11. Доведіть, що не існує таких непарних натуральних чисел a, b і c, що $ab^3-2003,\ bc^3+2005$ і ca^3-2007 є квадратами натуральних чисел

12. Знайдіть усі такі дійсні числа x, що не є цілими і при цьому задовольняють рівність

$$x+\frac{2004}{x}=[x]+\frac{2004}{[x]},$$

де $[x]$ – ціла частина числа x, тобто – найбільше ціле число, яке не перевищує x.

13. Нехай у трикутнику ABC точки M і N є серединами сторін BC і AC відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника ABC збігається з точкою перетину медіан трикутника AMN. Знайдіть величину кута ABC.

14. Доведіть, що для додатних чисел x, y, z, сума яких дорівнює одиниці, виконується нерівність

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$

15. Кожне натуральне число пофарбоване в один із двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору, Визначте, якого кольору число 2004, якщо число 1 має синій колір. Відповідь обгрунтуйте.

XI КЛАС

III етап

I тур

1. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ суми квадратів протилежних сторін рівні: $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Знайдіть кут між його діагоналями.

2. Для додатних чисел a та b доведіть нерівність

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

3. Сторони a, b, c трикутника ABC лежать проти кутів A, B, C відповідно. Доведіть, що довжина l бісектриси кута A обчислюється за формулою

$$l=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

4. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}>\frac{1}{2}.$$

II тур

5. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}x^4+y^4+z^4=1,\\ x^2+y^2+2z^2=\sqrt{7}.\end{cases}$$

6. Доведіть нерівність

$$2^{\sin x} + 2^{tgx} \ge 2^{x+1}$$

для всіх $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. Точка K лежить на стороні CD квадрата $ABCD$. Бісектриса кута BAK перетинає сторону BC в точці L. Доведіть, що $BL + KD = AK$.

8. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = -\frac{1}{x}.$$

ІІІ етап

9. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\sqrt{2-ax} + 2 = x$ має тільки один дійсний корінь.

10. Дано трикутник ABC, в якому $\angle B > 90°$. Серединний перпендикуляр до сторони AB перетинає сторону AC в точці M, а серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає продовження сторони AB за вершину B в точці N. Відомо, що відрізки MN і BC мають однакову довжину й перетинаються під прямим кутом. Знайдіть величини всіх кутів (у градусах) трикутника ABC.

11. Відомо, що

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a.$$

Доведіть, що

$$\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a.$$

12. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нехай точки E і F – основи перпендикулярів, проведених із точки A до прямих A_1D і A_1C відповідно, а точки P і Q – основи перпендикулярів, проведених із точки B_1 до прямих A_1C_1 і A_1C відповідно. Доведіть, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

13. Доведіть, що для додатних чисел x, y, z, сума яких дорівнює одиниці, виконується нерівність

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \ge \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2}.$$

14. Знайдіть усі визначені на множині $(0; +\infty)$ функції f такі, що для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність $f(x) > 0$ і при всіх $x > 0$, $y > 0$ справджується рівність

$$f\big(xf(y)\big) + f(x) + f(y) = f(x+y).$$

15. Кожне натуральне число пофарбоване в один із двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору, Визначте, якого кольору число 2004, якщо число 1 має синій колір. Відповідь обгрунтуйте.

2004 – 2005 навчальний рік

VII КЛАС

II етап

I тур

1. Кожну точку площини замалювали в один з двох кольорів. Доведіть, що існує відрізок довжиною 1, кінці якого мають однаковий колір.

2. Заданий кут, величина якого дорівнює $91°$, поділіть за допомогою циркуля і лінійки на 7 рівних частин.

3. Знайдіть остачу від ділення числа 14^5 на 4.

4. Як розрізати квадрат зі стороною 4 см на прямокутники, сума периметрів яких дорівнює 25 см?

5. Уздовж паркану росте 4 кущі малини. Число ягід на сусідніх кущах відрізняється на 1. Чи може на всіх кущах разом бути 125 ягід?

II тур

6. Чи можна з'єднати дорогами п'ять міст так, щоб кожне місто було з'єднане дорогами з трьома іншими?

7. Астролог царя Гороха назвав час сприятливим, якщо на годиннику з центральною секундною стрілкою при миттєвому обході циферблата за ходом стрілок годинника хвилинна стрілка зустрічається після годинної і перед секундною. Якого часу протягом доби більше: сприятливого чи несприятливого?

8. У трьох вершинах правильного п'ятикутника розмістили по фішці. Дозволяється пересувати їх по діагоналі у будь-яку вільну вершину. Чи можна в такий спосіб досягнути того, щоб одна з фішок повернулася на своє місце, а дві інші помінялися місцями?

9. В n коробках міститься $2n$ цукерок. Дівчинка і хлопчик по черзі беруть по цукерці. Першою бере дівчинка. Доведіть, що хлопчик може брати цукерки так, щоб дві останні цукерки містилися в одній коробці.

10. У трикутнику ABC сторона AC удвічі більша за сторону BC, а $\angle C = 2\angle A$. Знайдіть кути трикутника.

III етап

11. У виразі $1*2*3*4*5*6$ замість зірочок довільним чином поставили знаки „+" або „–". За один хід дозволяється замінити будь-які два знаки на протилежні. Чи можна за декілька ходів отримати вираз, значення якого кратне 7?

12. Скількома нулями закінчується добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2005$?

13. Чи може сума квадратів 9 послідовних натуральних чисел бути квадратом натурального числа?

14. На дошці написані числа 1, 2, 3, …, 2005. Дозволяється витерти довільні два числа, а замість них написати різницю їхніх квадратів. Чи може після 2004-кратного виконання такої операції залишитися число 10^{2005}?

15. На декартовій площині кожну точку з цілими координатами зафарбували в один з двох кольорів: деякі в синій, решту – в червоний. Доведіть, що існує прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, а вершини мають однаковий колір.

16. Група туристів о 12 год вирушила з табору по маршруту. Через півгодини штурман згадав, що залишив компас у таборі. Повернувшись до табору, він о 14 год наздогнав групу, що рухалася не змінюючи швидкість. О якій годині штурман повернувся до табору, якщо він ніде не затримувався і біг з постійною швидкістю?

17. Як розрізати прямокутний трикутник ABC з кутом $30°$ на 4 частини, з яких можна скласти квадрат.

VIII КЛАС

II етап

I тур

1. Знайдіть найменше просте число, що дає остачу 1 при діленні його на кожне з чисел 3, 4, 5 і 8.

2. В одному 20-поверховому будинку ліфт зіпсовано так, що на ньому можна або піднятися на 8 поверхів угору, або опуститися на 11 поверхів униз. (Якщо вгору чи вниз залишилося менше поверхів відповідно, то ліфт у цьому напрямку не рухається).

а) Чи можна цим ліфтом спуститися з 20-го поверху на перший?

б) На які поверхи можна дістатися на цьому ліфті з першого поверху?

3. Вершини чотирикутника $ABCD$ лежать на колі. Його діагоналі ділять кути при вершинах A та B навпіл, а кути при вершинах C і D у відношенні 2:1. Знайдіть величини кутів чотирикутника.

4. Два пороми відчалюють одночасно і зустрічаються на відстанні 720 метрів від берега. Після прибуття на місця призначення кожний пором стоїть 10 хв і відправляється назад. Пороми знову зустрічаються на відстанні 400 м від іншого берега. Визначіть ширину річки.

5. Вік кожного з трьох школярів є цілим числом. Добуток цих чисел дорівнює 1872. Середній за віком школяр старший за наймолодшого на стільки років, на скільки він молодший за найстаршого. Скільки років кожному школяру?

II тур

6. Джерела на дні озерця б'ють з постійною потужністю. 12 слонів випивають його за 4 хв, а 9 слонів – за 6 хв. Одного дня до озерця підійшли 6 слонів. За скільки хвилин вони вип'ють всю воду з нього? (Об'єм води на початку водопою один і той же).

7. Шість кругів розміщені на площині так, що деяка точка O міститься усередині кожного з них. Доведіть, що деякий з цих кругів містить центр іншого.

8. Усі натуральні числа від 1 до 100 розбили на дві групи: парні та непарні числа. Визначте в якій з груп сума всіх цифр, що використовується для запису їхніх чисел, більша і на скільки.

9. Розв'яжіть рівняння $6x + 4y = 11$ на множині цілих чисел.

10. У рівнобедреному трикутнику ABC із середини O основи BC опустили перпендикуляр OE на бічну сторону AC; H – середина OE. Доведіть, що прямі AH і BE перпендикулярні.

III етап

11. Знайдіть усі пари цілих чисел x, y для яких виконується рівність

$$3xy + 10x - 13y - 35 = 0.$$

12. Доведіть, що число $\sqrt{2005 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 + 1}$ є цілим.

13. Побудуйте множину всіх точок декартової площини, для координат яких виконується рівність

$$|x|^3 + |y|^3 + |xy^2| + |x^2y| + 7(|x| + |y|) = 4(x^2 + y^2) + 8|xy|.$$

14. Обчисліть вираз $\dfrac{z}{2x+y}$, якщо $\dfrac{z}{x+y} + 1 = \dfrac{z}{x}$, $\dfrac{z}{x+y} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{z}{x+2y}$.

15. На дошці написані числа 1, 2, 3, …, 2005. Дозволяється витерти довільні два числа, а замість них написати різницю їх кубів. Чи може після 2004-кратного виконання такої операції залишитися число 10^{3010}?

16. 10 учнів на олімпіаді розв'язали 41 задачу, причому серед них є щонайменше один, який розв'язав тільки одну задачу, а також є щонайменше по одному, хто розв'язав тільки дві, тільки три і тільки чотири задачі. Доведіть, що серед них є хоч би один учень, який розв'язав більше п'яти задач.

17. В опуклий чотирикутник $ABCD$ вписали коло з центром у точці O. При цьому $|AO| = |OC| = 1, |BO| = |OD| = 2.$ Знайдіть периметр чотирикутника.

IX КЛАС

II етап

I тур

1. Для довільного натурального числа, що не є четвертим степенем натурального числа, доведіть нерівність

$$\left\{\sqrt[4]{n}\right\} > \frac{1}{4\sqrt[4]{n^3}}.$$

2. Чи існує такий степінь двійки з натуральним показником, який можна подати у вигляді суми декількох (принаймні двох) послідовних натуральних чисел?

3. При яких значеннях параметра k сума коренів рівняння $4x^2 - 28x + k = 0$ дорівнює 22,5?

4. Із вершини B паралелограма $ABCD$ проведено його висоти BK і BH. Відомо, що $KH = a, BD = b$. Точка P – ортоцентр трикутника BKH. Знайдіть відстань BP.

5. У місті є три вулиці: T, V і P. Городяни, що живуть на вулиці T завжди говорять правду, жителі вулиці V завжди брешуть, а в розмові жителів вулиці P чергуються правдиві і брехливі висловлення. Одного разу з пожежної вежі міста помітили стовп диму, що піднімається. Тут же задзвонив телефон. Телефонуючий: „На нашій вулиці пожежа!” Черговий: „На якій вулиці?” Телефонуючий: „На вулиці P.” На яку вулицю потрібно їхати пожежникам?

II тур

6. П’ятицифрове число, що є повним квадратом, записане цифрами 0, 4, 8, 8, 8. Знайдіть це число.

7. Доведіть, що ціла частина числа $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2$, де n – натуральне число, є непарним числом. Знайдіть це число.

8. Кожну точку площини довільно розмальовано в один з двох кольорів: білий та чорний. Доведіть, що існує трикутник з кутами $30°, 60°, 90°$ та з меншою стороною, що дорівнює 1, усі вершини якого мають однаковий колір.

9. Послідовність чисел $(a_k), k = -n, -n+1, ..., n-1, n$, така , що $a_k = a_{-k}$ для всіх k і $a_{-n} + a_{-n+1} + ... + a_0 + ... + a_{n-1} + a_n = 1$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{a_{-n}}{1+2^n} + \frac{a_{-n+1}}{2+2^n} + ... + \frac{a_0}{2^n+2^n} + ... + \frac{a_{n-1}}{2^{2n-1}+2^n} + \frac{a_n}{2^{2n}+2^n}.$$

10. Ціле число a таке, що число $3a$ можна подати у вигляді $x^2 + 2y^2$, де x, y – цілі числа. Доведіть, що число a можна подати у вигляді $u^2 + 2v^2$, де u, v – також цілі числа.

III етап

11. Доведіть, що число $2005^{2004}-1$ ділиться без остачі на 2004^2.

12. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x^4+x^3+x-2005}=x\sqrt{5-x}$.

13. Побудуйте множину всіх точок декартової площини, для координат яких виконується рівність

$$\left[3\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right\}\right]=1,$$

де $[a]$ – ціла частина, $\{a\}$ – дробова частина числа a.

14. Чи може сума кубів 2005 послідовних натуральних чисел бути квадратом натурального числа?

15. Знайдіть найменше і найбільше значення дробу

$$\frac{4xy-3x^2}{x^2+y^2}.$$

16. Доведіть, що в довільному трикутнику відношення найменшої висоти до найменшої бісектриси більше за $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17. На дошці написано 5 чисел, одне з яких 2005. Дозволяється стерти будь-яке число і замість нього написати число $a+b-c$, де a, b і c – деякі три з інших чотирьох чисел. Чи можна за допомогою таких операцій отримати п'ять чисел, кожне з яких 2005?

X КЛАС

II етап

I тур

1. Число n називається честолюбним, якщо після приписування його до будь-якого натурального числа справа отримується число, яке ділиться на n. Знайдіть перші 10 честолюбних чисел та вкажіть загальне правило їх знаходження.

2. Площа трапеції дорівнює 2, а сума довжин її діагоналей – 4. Доведіть, що діагоналі трапеції перпендикулярні.

3. Доведіть, що функціональне рівняння

$$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=0$$

не може мати неперервних на всій прямій розв'язків.

4. У прямокутному трикутнику довжини медіани і висоти, яку проведені до гіпотенузи, дорівнюють m і h відповідно. Знайдіть довжину бісектриси прямого кута цього трикутника.

5. Доведіть, що при будь-яких допустимих значеннях x і y виконується нерівність

$$\frac{x}{2y}+\sqrt{\frac{y}{x}}\geq\frac{3}{2}.$$

6. На стороні AB квадрата $ABCD$ відмітили точку E, а на стороні CD – точку F так, що $AE:EB=CF:FD$. Знайдіть суму $\angle EMN+\angle EBN$, якщо M і N – точки перетину відрізків DE і BF з AC відповідно.

7. Розкладіть на множники:

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-...+(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}.$$

8. Нехай $a_1,...,a_n$ – невід'ємні числа. Доведіть, що

$$\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}\leq\left(\frac{a_1+...+a_n}{n}\right)^2+\left(\frac{\max(a_1,...,a_n)}{2}\right)^2.$$

9. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ такі, що $P\left(x+x^2\right)=P(x)+P\left(x^2\right)$.

10. На дошці написані числа $\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}$. За один крок дозволяється стерти будь-які два числа x,y і написати замість них число $x+y-xy$. Ці дії повторюються доти, доки не залишиться одне число. Знайдіть його найбільше та найменше можливі значення.

III етап

11. Доведіть нерівність $12\sin x-12\cos x+4\sin 2x\leq 13$.

12. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}=5,\\ 3xy-6x=10.\end{cases}$$

13. Розв'яжіть функціональне рівняння $f\left(f(x)\right)=2005-x-x^2-x^3$, де функція f монотонна на всій числовій прямій.

14. Чи є періодичною функція $f(x)=\sin\left((\cos\sqrt{5}x)\cdot(\cos\sqrt{401}x)\right)$?

15. Хлопчик і дівчинка по черзі фарбують клітинки таблиці розміром 1986×1986. За один хід дозволяється зафарбувати будь-які дві не зафарбовані раніше клітинки, котрі мають спільну сторону. Починає гру хлопчик, а переможцем вважається той, після ходу якого вже не можна продовжувати гру (в таблиці немає двох сусідніх вільних клітинок). Як потрібно грати дівчинці, щоб завжди перемагати в цій грі?

16. У гострокутному трикутнику PQR $\left(PQ>QR\right)$ проведено висоти PT і RK. QN – діаметр кола, описаного навколо трикутника PQR. Відомо, що величина гострого кута між висотами PT і RK дорівнює α, $PR=a$. Знайдіть площу чотирикутника $NKQT$.

17. Доведіть, що для довільного трикутника виконується нерівність $R\geq 2r$, де R і r – радіуси описаного та вписаного кіл відповідно.

XI КЛАС

II етап

I тур

1. Числа a, b, c, d такі, що $a^2+b^2=c^2+d^2=1$. Доведіть, що $ac+bd\le 1$.

2. Кожна точка простору має один з чотирьох кольорів. Чи знайдеться відрізок довжиною 1 з кінцями в точках однакового кольору?

3. Доведіть, що $h_a+h_b+h_c\ge 9r$, де h_a, h_b, h_c – висоти трикутника, а r – радіус вписаного кола.

4. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3=7x+2y, \\ y^3=2x+7y. \end{cases}$$

5. Скільки розв’язків має рівняння $x^5+x=a+2x^3$ залежно від параметра a?

II тур

6. У трикутнику ABC бісектриса CD і медіана AM перетинаються в точці O. Знайдіть відношення $CO:OD$, якщо $CB=a$, $AC=b$.

7. Доведіть, що рівняння

$$(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0,$$

де $a<b<c$ має три різні корені.

8. Доведіть, що не існує степенів двійки з натуральним показником, що відрізняються порядком цифр у десятковому запису.

9. Кожна точка простору довільним чином розфарбована в один з двох кольорів: червоний та білий. Доведіть, що знайдеться правильний трикутник зі стороною 1, усі вершини якого мають однаковий колір.

10. Розв’яжіть функціональне рівняння

$$f\left(x^2-2x+2^y\right)=f(x)+f\left(-1-y^3\right),$$

у якому невідома функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій.

III етап

11. Розв’яжіть рівняння

$$x^4+4x^3+ax^2+bx+1=0,$$

якщо відомо, що всі його корені дійсні та від’ємні.

12. Доведіть нерівність

$$\sin^2 x\cos^6 x\le \frac{3^3}{4^4}.$$

13. Доведіть, що ціла частина числа $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdot\ldots\cdot\sqrt{2005}}}}$ дорівнює 2.

14. Знайдіть границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2004}+2^{2004}+3^{2004}+\ldots+n^{2004}}{n^{2005}}.$$

15. Функція $y=f(x)$ визначена на множині дійсних чисел **R.** Знайдіть $f(2004)$, якщо рівність

$$f\bigl(xf(y)\bigr)=f(xy)+x$$

виконується для всіх x і y з множини **R**.

16. У сферу радіуса R_1 вписано правильний тетраедр $ABCD$ із стороною a. Сфера радіуса R_2 дотикається площин його граней DAB, DCB, DCA і першої сфери. Знайдіть відношення $R_1 : R_2$.

17. В основі піраміди лежить ромб $ABCD$ із стороною a. Бічне ребро CS дорівнює a і утворює з ребрами CD і CB кути α, кут BCD дорівнює β. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, що проходить через ребро CS і ділить AB у відношенні 1:2, починаючи від точки A.

2005 – 2006 навчальний рік

VII КЛАС

II етап

I тур

1. Різниця двох чисел дорівнює 35. Від ділення більшого числа на менше отримали частку 4, а остачу – 2. Знайдіть ці числа.

2. У сім'ї четверо дітей, їм 5, 8, 13 і 15 років. Імена дітей Аня, Боря, Віра і Галя. Скільки років кожній дитині, якщо одна дівчинка ходить у дитсадок, Аня старша за Борю, а сума років Ані і Віри ділиться на 3.

3. У виразі $1*2*3*4*5$ замініть зірочки знаками дій та розставте дужки так, щоб він дорівнював 100.

4. Два брати. Олег і Тарас, хочуть провідати бабусю, що живе за 20 км. У них є велосипед. Олег ходить пішки зі швидкістю 5 км/год., а швидкість їзди на велосипеді 20 км/год., швидкість Тараса 4км/год. і 15 км/год. відповідно. Велосипед можна залишити на дорозі без догляду. Як Їм найшвидше дістатися до бабусі?

5. Поновіть запис

$$\begin{array}{cccccc}
 & & * & 2 & * & 3 \\
\times & & & & * & * \\
\hline
 & * & * & * & 8 & 7 \\
+ * & * & * & * & * & \\
\hline
2 & * & 0 & 0 & 4 & *
\end{array}$$

ІІ тур

6. Двоє учнів хотіли купити книгу, вартість якої перевищувала кількість грошей одного учня на 35 коп., а іншого – на 40 коп. Коли вони віддали усі свої гроші, то отримали здачу, що дорівнює 0,4 вартості книги. Скільки коштувала книга?

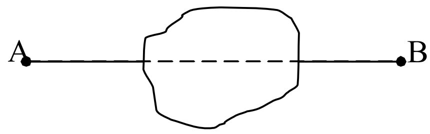
7. Селища A і B розташовані по різні боки і на різних відстанях від річки. Де варто розташувати човнову станцію, щоб вона була на однаковій відстані від обох селищ?

8. Чи можна на таблиці 5×5 записати числа $1, 2, ..., 25$ так, щоб у кожному рядку сума деяких із записаних у ньому чисел дорівнювала сумі решти чисел цього рядка?

9. Шлях Петрика до школи проходить повз п'ятьох садків. Він стверджує, що у першому і другому садках разом є 9 дерев, у другому і третьому – 13, третьому і четвертому – 19, четвертому і п'ятому – 11, а в п'ятому й першому – 16 дерев. Чи можна на підставі його даних встановити загальну кількість дерев у садках? Якщо так, то знайдіть цю кількість.

10. Доведіть, що для довільного натурального числа n знайдеться таке натуральне число m, число $mn+1$ – складене.

11. Між точками A і B міститься нездоланна перешкода.



Як визначити відстань між ними, користуючись тільки циркулем і лінійкою?

ІІІ етап

12. Є трицифрове число. У ньому витерли середню цифру і отримали двоцифрове число, яке менше за нього у дев'ять разів. Знайдіть усі такі трицифрові числа.

13. Розв'яжіть рівняння $|x-1005|+|x+1005|=2006$.

14. Чи є число $2003^{2003}+5$ квадратом натурального числа. Відповідь обґрунтуйте.

15. Дано кут O, точку A на його стороні й відрізок довжини l. Знайдіть на іншій стороні кута таку точку B, щоб $OB+BA=l$.

16. Серед семи монет, що розташовані по кругу є чотири фальшиві. (Фальшиві монети мають меншу вагу). Як знайти дві з них за допомогою одного зважування на терезах без важків, якщо відомо, що всі фальшиві монети лежать поруч?

17. Серед натуральних чисел від 1 до 100 включно яких більше: парних з непарною сумою цифр чи непарних з парною сумою цифр? А серед натуральних чисел від 1 до 1000?

18. Три дівчинки по черзі розфарбовують клітчасту дошку розміром 6×6 клітинок. За один хід можна розфарбувати квадрат, сторона якого дорівнює 1, 2 або 4. Двічі фарбувати одну клітинку не дозволяється. Першою фарбує Надя, другою Аня, третьою Катя, четвертою Надя і т.д. Переможцем вважається той, після чийого ходу усі клітинки розфарбовані. Хто виграє за правильної гри?

VIII КЛАС

II етап

I тур

1. При яких x значення виразу x^2-4x+7 найменше?

2. Доведіть, що n^5+4n ділиться на 5 при будь-якому натуральному n.

3. Яку найбільшу кількість дерев можна посадити по периметру трикутної ділянки зі сторонами 135 м, 110 м і 250 м, якщо відстань між деревами не може бути меншою 3 м?

4. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$.

5. Розв'яжіть рівняння $|x-1|-|x-2|=1$.

6. Пасажир їде в поїзді, швидкість якого 60 км/год., і бачить, що повз вікно проїжджає зустрічний поїзд за 4 с. Яка швидкість зустрічного поїзда, якщо його довжина 120 м?

III тур

7. Зелена рослинна маса, яку закладають для силосування, повинна мати певну оптимальну вологість. Для одержання такої маси змішують у певному співвідношенні масу рослин з різною вологістю. Скільки потрібно взяти зеленої маси вологістю 85% і маси вологістю 35%, щоб отримати для силосування 1 т зеленої маси вологістю 75%?

8. Користуючись циркулем і лінійкою побудуйте квадрат за вершиною і серединою сторони, що не проходить через неї.

9. На дошці записано рівняння $x^3+\_x^2+\_x+\_=0$. Двоє учнів по черзі вписують на вільні місця цілі числа – коефіцієнти рівняння. Довести, що гравець, котрий починає гру, може досягти того, щоб усі корені рівняння були цілими числами.

10. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $2005x+2006y=1$.

11. Чи можна суму 1+2+3+…+2000 розбити на 4 групи доданків так, щоб сума чисел у кожній групі була однаковою?

12. Знайдіть такі цифри x, y, z, при яких виконується рівність

$$\overline{xy}\sqrt{\overline{yx}}+\overline{yz}\sqrt{\overline{zy}}=\overline{(x+z)xy}.$$

III етап

13. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{1-x}+x-1=\sqrt{2006}.$

14. У трикутник ABC вписано рівносторонній трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершини A_1, B_1, C_1 лежать на сторонах BC, AC, AB відповідно. При цьому $\angle BC_1A_1=\angle C_1B_1A$, $\angle BA_1C_1=\angle A_1B_1C$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

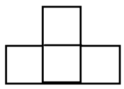
15. Нехай для деяких натуральних чисел a, b, c, d виконується рівність $2^a+2^b=2^c+2^d$. Доведіть, що $a+b=c+d$.

16. Розв’язати в цілих числах рівняння $nk+19n-3k=2006$.

17. Чи для кожного натурального числа його куб можна записати як різницю квадратів двох натуральних чисел?

18. У скільки разів зменшилася маса грибів, якщо після сушіння їхня вологість знизилася з 99% до 98%?

19. Чи можна клітчасту дошку розміром 10×10 клітинок замостити фігурками, що зображені на малюнку?



IX КЛАС

II етап

I тур

1. Добуток двох додатних чисел дорівнює 42. Чи може їхня сума бути меншою за 13? Якщо так, визначте, коли це буде.

2. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{5+4x-x^2}=5.$

3. Розв’яжіть у цілих числах рівняння $5x+7y=19.$

4. Доведіть, що в трикутнику ABC бісектрису AA_1 можна знайти за формулою $AA_1=\dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$, де $b=AC, c=AB, \alpha=\angle A.$

5. У деякій країні є 100 аеродромів, причому всі попарні відстані між ними різні. З кожного аеродрому піднімається літак і летить на найближчий до нього аеродром. Доведіть, що на кожний аеродром не може прилетіти більш ніж 5 літаків.

6. Доведіть, що коли добуток довільних додатних чисел x, y, z і t дорівнює 1, то справджується нерівність

$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y+3}+\frac{1}{z+3}+\frac{1}{t+3}\le 1.$$

II тур

7. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точка M – середина CD, точки K і L ділять AB на ти рівні частини: $AK = KL = LB$. Доведіть, що $S_{KLM} = \frac{1}{2}\left(S_{AKD} + S_{LBC}\right)$.

8. Розкладіть на множники многочлен $4x^4 - x^2y^2 + 2x^2y - x^2 + 2xy - 2x - 1$.

9. При якому значенні невід'ємного параметра a площа фігури, заданої системою нерівностей

$$\begin{cases} |x| + |y| \le 1, \\ (x-a)(y-a) \ge 0, \end{cases}$$

буде найменшою?

10. Розв'яжіть рівняння $\left[2x-1\right] - \left[3-x\right] = 2$.

11. Маша і Таня відвідують математичний гурток, де більше 91% хлопців. Чи може у цьому гуртку бути менше, ніж 21 хлопчик?

12. Доведіть, що число $43^{2005} + 19^{2005}$ ділиться на 31.

III етап

13. Розв'яжіть рівняння $9x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$.

14. Доведіть нерівність

$$\frac{a+b}{(1-a)+(1-b)} \ge \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(1-a)(1-b)}},$$

де $0 < a \le \frac{1}{2}, 0 < b \le \frac{1}{2}$. Знайдіть усі a та b, для яких нерівність перетворюється в рівність.

13. Є три відрізки, довжини яких x, y, z задовольняють рівність

$$x^4yz + xy^4z + xyz^4 = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3.$$

Доведіть, що площа квадрата, стороною якого є один з відрізків, дорівнює площі прямокутника, сторонами якого є два інші відрізки.

14. Більярдний стіл має форму прямокутного трикутника. З точки на гіпотенузі перпендикулярно до неї випустили кулю. Куля спочатку вдарилася в один борт стола, потім в інший і повернулася на гіпотенузу. Доведіть, що довжина такого шляху кулі не залежить від її стартового положення на гіпотенузі. (Куля відбивається від борту за законом: «Кут падіння дорівнює куту відбиття»).

15. Діагональ AC опуклого чотирикутника $ABCD$ ділить навпіл діагональ BD. Відомо, що $AB > AD$. Який з кутів BCA і DCA більший?

16. Для яких значень m нерівність $mx^2 + (2-m)x + 3 - 2m \le 0$ виконується тільки для одного дійсного значення x?

17. У колі радіуса 1 проведено кілька хорд, сума довжин яких більша за 7π. Доведіть, що знайдеться діаметр кола, який перетинає не менше восьми хорд.

X КЛАС

II етап

I тур

1. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y = 2(x - y), \\ (3x + 2y)^2 + 2(x - y)^2 = 96. \end{cases}$$

2. Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 2002$ не має розв'язків у цілих числах.

3. На площині задано параболу $y = x^2$ і пряму $y = x - 1$. Знайдіть довжину найкоротшого відрізка, один з кінців якого міститься на цій параболі, а інший – на прямій.

4. Усередині кута MAN дано точку O. Проведіть через цю точку пряму, яка відтинає від даного кута трикутник найменшої площі.

5. Доведіть, що для $x \in \left[0; \frac{1}{n} \right]$, де n – натуральне число, многочлен k-го степеня $1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + ... + (-1)^k C_n^k x^k$ набуває тільки додатних значень.

6. Розв'яжіть функціональне рівняння $f(x) + f\left(\frac{4}{2 - x} \right) = x.$

II тур

7. Розв'яжіть рівняння $x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0$.

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть лінійний кут двогранного кута, грані якого проходять через точки C і C_1, а ребро містить діагональ BD_1 куба.

9. Доведіть нерівність $\frac{3}{2}\left(a^4 + b^4 + c^4\right) + 24 \ge 4\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right)$ для дійсних чисел.

10. Розв'яжіть рівняння $\left(\overline{xy}\right)^2 - \left(\overline{yx}\right)^2 = 2005$, де $\overline{xy}$ – двоцифрове число, записане цифрами x та y.

11. Вкажіть на координатній площині Oxy множину точок, всі координати x та y яких задовольняють нерівність $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$.

12. Знайдіть усі натуральні n при яких $3^n + 5^n$ ділиться на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

III етап

13. Обчисліть площу фігури, координати точок якої задовольняють нерівність $|x + y| + |x - y| \le 2$.

14. Знайдіть найменше значення виразу $x^3 + y^3 - \frac{1}{x^2 + y^2}$, якщо $x + y = 1$.

15. Для деяких відмінних від нуля чисел x, y, z виконуються рівності

$$x^2 - y^2 = yz,\ y^2 - z^2 = xz.$$

Доведіть, що $x^2 - z^2 = xy$.

16. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо в ньому відношення катетів і відношення бісектрис гострих кутів є раціональними числами.

17. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $2^x = 3y^2 + 1$.

18. Знайдіть усі функції $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, що задовольняють рівність

$$2005 f(2006 - x) + 2006 f(x - 2005) = (x - 2005)^2$$

для всіх $x, y \in \mathbf{R}$.

19. Вісім однакових кубиків з ребром, довжина якого дорівнює 1, зафарбували так, що 24 їхні грані білі, а 24 – чорні. Доведіть, що з них можна скласти куб, у якого площа частини поверхні, зафарбованої білою фарбою, така ж як площа частини поверхні, зафарбованої чорною фарбою.

XI КЛАС

II етап

I тур

1. Розв'яжіть рівняння $(x+6)^4 + (x+4)^4 = 82$.

2. Доведіть, що при всіх дійсних x, y, z, які задовольняють рівності

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8, \quad xz - xy + yz = 4,$$

змінна x задовольняє нерівність $|x| \le \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

3. Розв'яжіть функціональне рівняння $f(x) + f\left(\dfrac{4}{2-x}\right) = x$.

4. На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються і жодні три не мають спільної точки. На скільки частин ділять площину ці кола?

5. Знайдіть усі значення параметра m, при яких рівняння

$$\cos^2 3x + (2m^2 - 3{,}5)\cos 3x + m^2 - 2 = 0$$

має рівно 5 коренів на відрізку $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. Доведіть, що довільну трикутну піраміду можна перетнути площиною так, щоб у перерізі утворився ромб.

II тур

7. Знайти числа x і y, якщо вони задовольняють рівняння $2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1$.

8. У тенісному турнірі брали участь n жінок і $2n$ чоловіків. Кожні два учасники зустрілися один раз (нічиїх не було). Відношення кількості перемог, одержаних жінками, до кількості перемог, одержаних чоловіками, дорівнює 7:5. Знайти n.

9. Дано правильну призму $ABCA_1B_1C_1$. Через вершину *A*, точку *K* – середину ребра CC_1, проведено площину так, що в перерізі одержали трикутник найменшого периметра. В якому відношенні площина перерізу ділить ребро BB_1?

10. Функції $f(x)$ і $g(y)$ задані для будь-яких дійсних x та y, і набувають дійсних значень. Відомо, що для довільних дійсних x та y виконується рівність $f\left(x+g(y)\right)=2x+y+5$. Обчислити $f\left(2003+f(2004)\right)$, якщо $f(0)=2005$.

11. Для додатних чисел x,y,z довести нерівність $(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)\le xyz$.

12. Розв’язати нерівність $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{9-x}>\sqrt[6]{27-x^2}$.

III етап

13. Знайдіть найменше значення виразу $x^3+y^3+\dfrac{1}{x^2+y^2}$, якщо $x+y=1$.

14. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=yz+1, \\ y^2+z^2=zx+1, \\ z^2+x^2=xy+1. \end{cases}$$

15. Доведіть, що коли для деякого натурального числа n рівняння

$$x^3-3xy^2+y^3=n$$

має цілочисловий розв’язок, то воно має принаймні три цілочислових розв’язки.

16. Чи існує функція, що зростає в точці $x_0=0$, але не є зростаючою в жодному її околі?

17. Побудуйте графік функції f, визначеної на множині **R** всіх дійсних чисел, якщо рівність $f(x+y)=f(x)+2^{|x|}f(y)$ виконується для всіх x і y таких, що $xy\ge 0$, а $f(1)=1$.

18. Доведіть, що коли кола, вписані в дві грані довільної трикутної піраміди дотикаються одне одного, то кола, вписані в дві інші грані піраміди також дотикаються одне одного.

19. У правильному 2005-кутнику в чорний колір пофарбовано 805 вершин. Доведіть, що деякі три з них є вершинами рівнобедреного трикутника.

2006 – 2007 навчальний рік

VII КЛАС

III етап
I тур

1. Задача Авіценни (філософ, лікар, математик, 980-1037) Якщо число при діленні на 9 дає остачу 1 або 8, то його квадрат при діленні на 9 дає в остачі 1. Довести це.

2. Обчислити: $2^{2006}-2^{2005}-2^{2004}-2^{2003}-...-2^3-2^2-2-1$

3. Як відміряти 15 хвилин, маючи під рукою 7- та 11-хвилинні пісочні годинники?

4. У числа $2006!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot ....\cdot 2005\cdot 2006$ обчислили суму цифр. У отриманому числі знов обчислили суму цифр, і так продовжували доти, доки не отримали одноцифрове число. Яке число отримали?

5. Число B складає 1% від числа A. Як треба змінити число A, щоб воно складало 2% від половини B?

6. Турист пройшов 0,3 усього шляху, а потім – 0,4 від того, що залишилося. В результаті він пройшов на 6 км більше від половини шляху. Визначити довжину всього шляху.

7. У кав'ярні «Математик» склянка лимонаду, 3 порції морозива та 7 тістечок разом коштують 14 гривень, а склянка лимонаду, 4 порції морозива та 10 тістечок –17 гривень. Скільки треба заплатити в цій кав'ярні:

а) за склянку лимонаду, порцію морозива та тістечко?

б) за 2 склянки лимонаду, 3 порції морозива та 5 тістечок?

III етап
III тур

8. Якою цифрою закінчується число, що дорівнює такій різниці добутків:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2006\cdot 2007-1\cdot 3\cdot 3^2\cdot ...\cdot 3^6?$$

9. Розв'яжіть рівняння $2x+4a+3=bx+7$, де a і b – деякі цілі числа.

10. Довести, що сума чисел $\overline{abc}, \overline{bca}$ *і* $\overline{cab}$ кратна 111.

11. Яка повинна бути найменша кількість одиниць у числі 11…1, щоб воно ділилося на 33?

12. Миша гризе куб сиру з ребром 3, що складається з 27 одиничних кубиків. Коли миша з'їдає будь-який кубик, вона переходить до іншого, що має з попереднім спільну грань. Чи може миша з'їсти весь куб крім середнього кубика.

13. Два учні, високий і низький, вийшли одночасно з одного і того ж будинку в одну школу. У низького крок був на 20% коротший за крок високого, але за одиницю часу він встигав зробити на 20% кроків більше. Хто з них раніше прийшов до школи?

14. Автомобіль їхав з Кіровограда до Києва. Перша частина шляху містить стільки кілометрів, скільки хвилин він затратив на решту шляху. Решта шляху містила стільки кілометрів, скільки хвилин він затратив на першу частину шляху. Яка середня швидкість автомобіля?

III етап

15. Ліспромгосп вирішив вирубати сосновий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор лісового господарства всіх заспокоїв, сказавши: «У вашому лісі 99% сосен. Ми будемо рубати тільки їх і залишимо 98% сосен від усього загалу». Яку частину лісу має намір вирубати ліспромгосп?

16. Яких семицифрових чисел більше: у запису яких є цифра 7, чи тих, що немає цифри 7?

17.. У трикутнику ABC проведено бісектрису BK, висоту BE (точки K і E лежать на стороні AC). Кут BKE дорівнює $70°$. Знайдіть різницю кутів C і A.

18. Король хоче збудувати 6 фортець і з'єднати деякі з них дорогами. (Будь-які дві з них з'єднані не більше як однією прямолінійною дорогою). Намалюйте таку схему розташування фортець і доріг, щоб на ній було три перехрестя і на кожному з них перетиналися дві дороги.

19. Сто піратів переносили з корабля на берег скрині з коштовностями. Кожну скриню несли семеро піратів. Капітан вважає, що під час перенесення всі пірати заробили порівну, бо кожний брав участь у перенесенні 65 скринь. Доведіть, що капітан помилився.

20. У складі загону табору відпочинку є 23 школярі 10-ти, 11-ти 12-ти і 13-ти років. Разом їм 253 роки. Скільки в загоні 12-літніх школярів, якщо їх у півтора рази більше за 13-літніх?

21. На циферблаті годинника стерлися деякі числа, залишилися тільки 10 і 12. Андрійко та Юрась взялися поновити стерті числа. Для цього вони придумали таку гру. Поновлюють числа по черзі. За один хід можна поновити одне або два послідовні числа однакової парності. Гра закінчується за умови, що поновлені всі числа. Виграє той, хто закінчує гру. Хто виграє, якщо гру починає Андрійко?

VIII КЛАС

III етап

I тур

1. Задача Лакруа (відомий французький математики, 1765-1841) Один фонтан наповнює басейн за 2½ години, а другий – за 3¾ години. За який час обидва фонтани, працюючи разом, наповнять басейн?

2. Висота і медіана трикутника, проведені з однієї вершини, поділили кут при ній на три рівні частини. Знайти кути трикутника.

3. Дано кут АОВ і точка М всередині кута. Побудувати відрізок, кінці якого лежать на сторонах кута, а точка М ділить відрізок у відношенні 2:3

4. Знайти невідомі цифри числа 84*5*, якщо воно ділиться на 198 без остачі.

5. Розв'язати рівняння:

$$(2x^2-5x+3)^6+(2x^2-5x+3)^4(2x^2+x-6)^2+(2x^2+x-6)^4=0$$

6. Що більше: 10^{16} чи 20^8?

7. Є дві купки цукерок, що мають 20 та 21 цукерку. Двоє гравців роблять ходи по черзі. За один хід можна з'їсти одну з купок, а іншу поділити на 2, не обов'язково рівні купки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Для якого з гравців, першого чи другого, існує виграшна стратегія?

III етап

III тур

8. Розкладіть многочлен $2x^4+3x^3-3x^2+3x-1$ на множники з цілими коефіцієнтами.

9. Знайдіть всі пари натуральних чисел $(x;\, y)$, для яких виконується рівність

$$x^2-y^2-4y=2007.$$

10. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{|x^2-1|}{|x-1|}$.

11. Цілі числа a, b, c такі, що $5a+4b+11c=0$, а число $3b+2c$ ділиться без остачі на 5. Доведіть, що число $10a+3b+2c$ ділиться без остачі на 25.

12. Число a складає 1% від числа b. Як потрібно змінити число a, щоб піврізниця чисел a і b складала 10% від півсуми цих чисел?

13. На площині дано 5 точок, ніякі 3 з них не лежать на одній прямій. Довести, що з цих точок можна вибрати 4, що є вершинами опуклого чотирикутника. (Чотирикутник називається опуклим, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, на якій міститься його сторона).

14. Є 13 гирьок, маса кожної з яких дорівнює цілому числу грамів. Відомо, що будь-які 12 з них можна розкласти на 2 шальки терезів по 6 на кожну так, що вони будуть зрівноважені. Довести, що всі гирьки мають однакову масу.

15. Простим чи складеним є число $2006^{2007}+2007^{2006}$? Відповідь обґрунтуйте.

16. Розв'яжіть рівняння $4x^4-4x^3+5x^2+4x+1=0$.

17. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких дріб $\dfrac{2n+3}{3n+2}$ можна скоротити.

18. Побудуйте на координатній площині множину точок (x, y), координати яких задовольняють рівність $x^2+y^2=2(|x|+|y|)$. Обчисліть площу фігури, яку обмежують ці точки.

19. Доведіть, що навколо трапеції можна описати коло тоді й тільки тоді, коли трапеція рівнобічна.

20. . Чи можна підібрати такі чотири різні натуральні числа, щоб сума будь-яких двох з них була степенем числа 3?

21. На циферблаті годинника стерлися деякі числа, залишилися тільки 10 і 12. Андрійко та Юрась взялися поновити стерті числа. Для цього вони придумали таку гру. Поновлюють числа по черзі. За один хід можна поновити одне або два послідовні числа. Гра закінчується за умови, що поновлені всі числа. Виграє той, хто закінчує гру. Хто виграє, якщо гру починає Андрійко?

IX КЛАС

III етап
I тур

1. Центр вписаного в трикутник кола і центр описаного навколо нього кола симетричні відносно сторони трикутника. Знайти величини кутів трикутника.

2. ABCD і $A_1B_1C_1D_1$ – паралелограми. Чи правда, що середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 є вершинами паралелограма?

3. Розв'язати рівняння $\frac{x^4+1}{x(x^2+1)}=\frac{41}{15}$

4. Для довільних дійсних чисел a та b доведіть нерівність

$$a^4+4b^4+6a^2+1\ge 4a^2b^2+4ab+3b^2.$$

5. В таблиці одна з клітинок (кутова) пофарбована у чорний колір, а решта клітинок – білі. В ній можна перефарбовувати рядки чи стовпці, тобто замінювати колір усіх клітинок рядка чи стовпця одночасно на протилежний. Чи можна за допомогою таких перефарбувань зробити усі клітинки таблиці білими?

6. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність $x-[x]=y-[y]$, де $[a]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує число a.

7.Скільки натуральних чисел, менших 1001 діляться на 10 або на 14?

III етап
III тур

8. Довести, що коли відрізок, який з’єднує середини протилежних сторін опуклого чотирикутника дорівнює півсуми інших двох сторін, то ці сторони паралельні.

9. Скільки різних цілочисельних розв’язків має нерівність $|x|+|y|<100$?

10. Дано прямокутний трикутник ABC. З вершини B прямого кута проведена медіана BD. Точка К – точка дотику сторони AD трикутника ABD з колом, що вписане в цей трикутник. Знайти кути трикутника ABC, якщо К ділить AD навпіл.

11. Чи існують два послідовних натуральних числа таких, що сума цифр кожного з них ділиться на 125? Знайти найменшу пару таких чисел чи довести, що їх не існує.

12. Цілі числа a, b, c такі, що $5a+4b+11c=0$. Доведіть, що число $10a+3b+2c$ ділиться без остачі на 25.

13. Грають двоє. Один задумує набір з цілих одноцифрових чисел $x_1, x_2, ..., x_9$ як додатних, так і від'ємних. Другому дозволяється запитати, чому дорівнює сума $a_1x_1+a_2x_2+...+a_9x_9$, де $a_1, a_2, ..., a_9$ – будь-який набір чисел. Чи може другий гравець відгадати числа, задумані першим? Якщо так, то яка найменша кількість питань забезпечує другому відгадування задуманих чисел?

14. З 28 костей доміно забрали усі, що мають шістки. Чи можна решту викласти у ланцюжок?

ІІІ етап

15. Знайдіть цифри a і b числа $2a0620b7$ так, щоб воно ділилося без остачі на 99.

16. Знайдіть хоч одну пару натуральних чисел x і y, яка задовольняє рівняння $x^2-17y^2=1$. Доведіть, що таких пар є нескінченна кількість.

17. Доведіть, що для будь-яких чисел x і y таких , що $|x|<1, |y|<1$, виконується нерівність $\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{1-xy}$.

18. Знайдіть усі прості числа p, для яких p^2-8p+9 є простим числом.

19. У деякій компанії є 5 хлопчиків і 6 дівчаток. Чи може статися так, що всі дівчатка знайомі з різною кількістю хлопчиків, а всі хлопчики знайомі з однаковою кількістю дівчаток?

20. Яку найбільшу кількість попарно різних трикутників можна утворити, якщо вершини цих трикутників мають лежати у вершинах даного правильного 155-кутника?

21. У трикутнику ABC бісектриси AQ і BP перетинаються в точці M так, що в чотирикутник $CPMQ$ можна вписати коло. Доведіть, що ABC – рівнобедрений трикутник.

X КЛАС

ІІІ етап

І тур

1. Обчислити без допомоги таблиць і калькулятора $\sin 18^0$.

2. Знайти суму цифр квадрата числа, що записане дев'яносто дев'ятьма дев'ятками.

3. Як побудувати трикутник ABC за точками O_1, O_2, O_3, які симетричні центру описаного кола відносно сторін трикутника.

4. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $(x-3a)(x-a-3)<0$ виконується для всіх x таких, що $1 \le x \le 3$.

5. Розв'язати рівняння $x^2-[x]-2=0$, де $[x]$ – ціла частина числа x.

6. Старовинна єгипетська задача: Визначити довжину сторін прямокутника, якщо відомо їх відношення і площа фігури.

7. З 80 однакових на вигляд металевих кульок одна легша за інші. За яку найменшу кількість зважувань на шалькових терезах без гирьок можна знайти цю кульку?

ІІІ етап
ІІІ тур

8. Розв'язати у натуральних числах рівняння $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1$.

9. Довести, що серед усіх трикутників з даною стороною a та даною площею S найменший периметр має рівнобедрений трикутник.

10. У трапеції ABCD основи $AB=a, CD=d$, діагоналі є бісектрисами кутів A і B. Знайти площу трапеції.

11. На площині дано 4 точки. Відомо, що 6 попарних відстаней між ними набувають лише два різних значення. Які конфігурації можуть утворювати ці точки та яке можливе відношення відстаней між ними?

12. Знайти всі функції $f: R \to R$, для яких $f(2006)=2007$, а при будь-яких x, y виконується рівність $f(x+y)=[f(x)]+\{f(y)\}$. ($[a]$– найбільше ціле число, що не перевищує число $a, \{a\}=a-[a]$).

13. Андрій, Борис і Сергій колекціонують марки. В Андрія є більше половини марок, які є в Бориса. В Бориса є більше половини марок, які є в Сергія. У Сергія є більше половини марок, які є в Андрія. Чи правда, що деяка марка є в кожній колекції?

14. Задача Леонардо Фібоначчі (XII ст.). Дехто купив 30 птахів за 30 монет однакової вартості.. За кожних 3 горобців він заплатив 1 монету, за кожні 2 синиці теж 1 монету, а за кожного голуба – по 2 монети. Скільки було птахів кожного виду?

ІІІ етап

15. Знайдіть усі пари (x, y) цілих чисел x, y, для яких виконується рівність

$$8x^2+3xy+2y^2-20x-10y=0.$$

16. Доведіть, що нерівність $x^2+y^2+xy+x+y+1>0$ виконується для всіх дійсних чисел x і y.

17. Коефіцієнти квадратного тричлена $f(x)=x^2+ax+b$ – цілі числа, причому $|b|\le 800$, а $f(120)$ – просте число. Доведіть, що рівняння $f(x)=0$ не має цілих коренів.

18. Побудуйте множину точок координатної площини, координати яких є розв’язками рівняння $\{|x|\}+\{|y|\}=1$. ($\{a\}$ – дробова частина числа a).

19. Подайте число 2007 у вигляді суми кількох натуральних чисел так, щоб добуток цих чисел був якомога більший.

20. Площину пофарбували у три кольори так, що кожна її точка має один з трьох кольорів. Доведіть, що на площині можна побудувати трикутник, площа якого дорівнює 1, а всі вершини мають однаковий колір.

21. У трикутнику ABC висоти AQ і BP перетинаються в точці M так, що в чотирикутник $CPMQ$ можна вписати коло. Доведіть, що ABC – рівнобедрений трикутник.

XI КЛАС

II етап
I тур

1. Доведіть, що для внутрішніх кутів α, β і γ виконується рівність:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ dx+ey+f=0, \end{cases}$$

де параметри a, b, c, d, f утворюють арифметичну прогресію.

3. Людину, що йде вздовж трамвайної колії, кожні 7 хвилин обганяє трамвай, а кожні 5 хвилин трамвай проходить назустріч. Як часто ходять трамваї цією колією?

4. Знайдіть усі цілі числа k, для яких рівняння

$$\cos kx=1+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

має розв'язок.

5. В трапеції менша основа дорівнює 2, прилеглі кути – по 135°. Кут між діагоналями, що повернений до основи, дорівнює 150°. Знайдіть площу трапеції

6. Через діагональ основи і висоту правильної чотирикутної піраміди проведено площину. Відношення площі перетину до бокової поверхні піраміди дорівнює k. Знайдіть косинус кута між апофемами протилежних бічних граней.

7. Знайдіть область значень функції $y=\dfrac{18x-5x^2-20}{x^2+4}$.

II етап

II тур

8. Знайдіть дійсні корені рівняння

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}},\quad \left(0<a<\frac{1}{4}\right).$$

9. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+2ay=7-a^2, \\ x^2+y^2-6x-2ay=-8-a^2 \end{cases}$$

має рівно два розв'язки?

10. Розв’яжіть нерівність $\left[x^2\right]-\left[2x\right]\geq 0$.

11. Доведіть, що жоден опуклий 13-кутник не можна розрізати на паралелограми?

12. Навколо сфери радіуса 10 описано деякий 19-гранник. Доведіть, що на його поверхні знайдуться дві точки, відстань між якими більша за 21.

13. Доведіть, що знайдеться більше 1000 трійок (a,b,c) натуральних чисел для яких виконується рівність $a^{15}+b^{15}=c^{16}$.

14. Хлопчик і дівчинка проводять діагоналі в правильному 2006-кутнику так, щоб вони не перетиналися. Той, хто проведе таку діагональ останнім, виграє. Як повинна грати дівчинка, що починає гру, щоб виграти?

III етап

15. Розв’яжіть рівняння

$$4\sin^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x\sin x+\cos^2 x-2\sin x+2=0.$$

16. Для деяких відмінних від нуля чисел x, y, z виконуються рівності $x^2-y^2=yz,\ y^2-z^2=xz.$ Доведіть, що $x^2-z^2=xy.$

17. Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_{2007}$ – довільна перестановка перших 2007 натуральних чисел. Доведіть, що

$$(k_1+1)(k_2+2)\ldots(2007+k_{2007})\geq 2^{2007}\cdot 2007!\ .$$

(Символ $n!$ означає добуток перших n натуральних чисел).

18. Нехай числа $n-20$ і $n+20$ прості для деякого натурального простого числа n. Доведіть, що число $n+2006$ також просте.

19. Обчисліть інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2007} x dx}{\sin^{2007} x+cos^{2007} x}.$$

20. Чи існує функція $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ така, що для всіх дійсних x одночасно виконуються рівності $f(1+f(x))=2-2x$ і $f(f(x))=x^{2007}$?

21. У трикутнику ABC через точки P і Q, що є серединами сторін AC і BC відповідно, провели прямі, перпендикулярні до цих сторін. Доведіть, що трикутник рівнобедрений, якщо в чотирикутник $CPMQ$, де M – точка перетину перпендикулярів, можна вписати коло.

2007 – 2008 навчальний рік

VII КЛАС

II етап

1. Подайте число 10 (хоча б одним способом) п’ятьма дев’ятками, використовуючи цифри та знаки дій.

2. Збільшуючи деяке число на 15%, отримали 207. На скільки відсотків потрібно зменшити це число, щоб отримати 126?

3. У сосновому лісі 900000 сосен. На кожній з них не більше 600000 голок. Доведіть, що принаймні у двох сосен однакова кількість голок.

4. О 12 годині дня годинна і хвилинна стрілки годинника збігаються. Через яку найменшу кількість хвилин стрілки знову збіжаться?

5. Розв’яжіть ребуси, в яких зашифровано додавання та множення двох чисел, за умови, що однаковим буквам відповідають однакові цифри.

$$\begin{array}{r} \grave{A}\acute{A}\hat{A} \\ +\quad \hat{A}\hat{A} \\ \hline \grave{A}\grave{A}\acute{A} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \grave{A}\acute{A}\hat{A} \\ \times\quad \hat{A}\hat{A} \\ \hline \grave{A}\acute{A}\hat{A} \\ \grave{A}\acute{A}\hat{A} \\ \hline \grave{A}\tilde{A}\grave{A}\hat{A} \end{array}.$$

III етап

6. У кімнаті 16 столів. Частина з них має по 4 шухляди, решта – по три. Всього 57 шухляд. Скільки і яких столів стоїть в кімнаті?

7. У Карлсона є 100 різних паличок. Доведіть, що зламавши не більше двох з них (кожну – на дві частини), він може із всіх паличок скласти прямокутник.

8. На полі зібрали 100 кг огірків, що містять 99% води. До моменту привозу на ринок в огірках залишилось 98% води. Скільки тепер важать огірки?

9. У Змія Горинича 1000 голів. Ілля Муромець одним ударом меча може відрубати точно 1, 17, 21 або 33 голови, але при цьому в Змія виростає відповідно 10, 14, 0 або 48 голів. Чи зможе богатир перемогти Змія Горинича?

10. Доведіть, що серед довільних дві тисячі восьми цілих чисел можна вибрати не менше двох таких, різниця яких ділиться на 2007.

VIII КЛАС

II етап

1. У класі не більше 40 учнів. Зріст кожного з них вимірюється цілим числом сантиметрів. Середній зріст усіх учнів цього класу, крім найвищого, дорівнює $148\frac{3}{7}$ см, а середній зріст учнів цього класу, окрім найнижчого – $149\frac{4}{7}$ см. Скільки учнів у цьому класі?

2. На дошці розміром 4×4 грають двоє**.** Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку зафарбовувати можна лише один раз. Програє той гравець, після чийого ходу утвориться квадрат 2×2, що складається із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш – той, хто ходить першим, чи його суперник? Відповідь обґрунтуйте.

3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD рівні сторонам BC і DA відповідно. Точки K, L, M, N – середини сторін AB, BC, CD, DA відповідно. Доведіть, що діагоналі KM і LN чотирикутника $KLMN$ рівні.

4. Розв'яжіть рівняння $3\cdot\overline{xy}-7\cdot\overline{yx}=2$, де x, y – цифри чисел $\overline{xy}$ та $\overline{yx}$.

5. Майстер проводив сеанс одночасної гри в шахи. За перші дві години він виграв 10% партій, а 8 партій програв. До закінчення сеансу він виграв у 10% суперників, що залишилися, одну партію програв, а останні 8 партій звів у нічию. На скількох дошках проводилася гра?

III етап

6. Учень задумав натуральне число, яке є точним квадратом. Добув з нього квадратний корінь, додав 2 і знову добув квадратний корінь, додав 2 і в результаті отримав задумане число. Яке число задумав учень?

7. У магазин привезли борошно в мішках. Відомо, що в І, ІІ і ІІІ мішках не менше 60 кг борошна, в І, ІІ і IV – не більше 50 кг борошна, в І, ІІІ і IV – не більше 40 кг борошна, у ІІ, ІІІ і IV – не більше 30 кг. Скільки борошна було в кожному мішку?

8. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC. Відомо, що бісектриса кута ABC перетинає середню лінію цієї трапеції в точці P, а основу AD – у точці Q. Знайдіть величину кута APQ.

9. Поживність 1 кг сіна – 0,42, а силосу – 0,20 кормових одиниць. Сіно містить 85%, а силос – 27% сухої речовини. Скільки потрібно давати корові щодня сіна і скільки силосу, якщо вона повинна одержувати 6 кормових одиниць і 9 кг сухої речовини?

10. Двоє гравців грають у таку гру: перший називає 3 будь-які числа, відмінних від 0, а другий на власний розсуд ставить їх на місце зірочок у виразі

$$*x^2+*x+*.$$

Перший виграє, якщо утворений при цьому квадратний тричлен має два різні раціональні корені. Доведіть, що він може досягти перемоги.

IX КЛАС

II етап

1. На основі AC рівнобедреного трикутника ABC помітили точку M. На продовженні сторони AC, за точкою C, помітили точку N так, що $AC = CN$. Доведіть, що $AB + BC < MB + BN$.

2. Антикварний магазин купив два предмети за 225 грн і продав їх, отримавши 40% прибутку. Скільки коштував другий предмет, якщо перший дав прибутку 25%, а другий – 50%?

3. Розв'яжіть рівняння

$$2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x + 1}.$$

4. На дошці записано вираз

$$*n*n^2*n^3*n^4*n^5*n^6*n^7*n^8.$$

Петрик та Оксанка грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі: за один хід дозволяється замінити один знак "*" на знак "+" або "–". Оксанка прагне, щоб отриманий після восьми ходів вираз ділився на 6 для кожного натурального *n*. Петрик ходить першим. Довести, що Оксанка може забезпечити собі перемогу незалежно від того, як ходить Петрик.

5. Чи може сума степенів 2007^{2008} і 2008^{2007} бути квадратом натурального числа?

III етап

6. Розв'яжіть рівняння

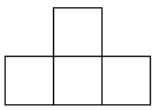
$$\left[x + \left[x + ... + \left[x + [x]\right]\right]\right] = \left|x + |x| + ... + |x + |x|\right|\right|,$$

де $[x]$ – найбільше ціле число, що не перевищує x, якщо в обох частинах рівняння по вісім знаків "+".

7. Доведіть, що якщо a, b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника, то $c \geq \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$

8. Функція f визначена на множині усіх дійсних чисел і набуває тільки невід'ємних значень. Знайдіть усі функції f, для яких при будь-яких дійсних x, y виконується рівність $f\left(y - f(x)\right) = y^2 - 2yf(x) + x^4$.

9. При яких n, n – натуральне число, дошку $n \times n$ можна замостити фігурками, які зображені на малюнку?



10. На кожному з 44 дерев, що розміщені по колу, сидить 1 горобець. Час від часу два горобці перелітають на сусіднє дерево: один за годинниковою стрілкою, а другий – проти. Чи можуть всі горобці зібратися на одному дереві?

X КЛАС

II етап

1. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ мають однаковий знак?

2. Знайдіть всі додатні трицифрові числа, які при діленні на 37 дають остачу 2, а при діленні на 11 дають остачу 5.

3. Двоє гравців по черзі кладуть сірники в синю та червону коробки. Перший гравець за кожним своїм ходом може покласти 1 сірник до синьої коробки або 2 сірники до червоної коробки; другий гравець може покласти 2 сірники до синьої коробки або 1 до червоної. Перед початком гри коробки були порожні. Виграє той, після чийого ходу хоч би в одній коробці сірників стане більше, ніж 2007. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу?

4. Робочий день скоротився з 8 год до 7 год. На скільки відсотків потрібно підняти продуктивність праці, щоб при тих самих розцінках заробітна плата зросла на 5%?

5. У трикутнику центри вписаного та описаного кіл співпадають. Доведіть, що трикутник правильний.

III етап

6. Розв'яжіть рівняння

$$\left[x+\left[x+\ldots+\left[x+[x]\right]\right]\right]=\left|x+|x|+\ldots+|x+|x||\right|,$$

де $[x]$– найбільше ціле число, що не перевищує x, якщо в лівій частині рівняння десять знаків «+», а в правій – одинадцять знаків «+».

7. При яких значеннях параметра a один із розв’язків системи

$$\begin{cases} x + y = 2(a+1|) \\ xy = 3a+1 \end{cases}$$

задовольняє нерівності $|x|<1, |y|>1$?

8. Кут між мимобіжними прямими AB і CD дорівнює $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E і F – середини відрізків AB і CD відповідно, пряма EF перпендикулярна кожній з прямих AB і CD. Відомо, що $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, $EF = \sqrt{13}$. Знайдіть кут ACB.

9. У класі 28 учнів. Середній зріст всіх учнів цього класу – 150 см. Середній зріст всіх хлопчиків цього класу – 155 см, а середній зріст всіх дівчаток – 148 см. Скільки дівчаток в цьому класі? Відповідь обґрунтуйте.

10. Два гравці по черзі ставлять 0 та 1 в клітинки нескінченного аркуша. Перший ставить 1, другий – 0. Чи може другий гравець грати так, щоб перший ніколи не зміг заповнити одиницями якийсь квадрат 2×2?

XI КЛАС

II етап

1. Розв'яжіть нерівність
$$(5x+4y)x+(5y+4z)+(5z+4x)\le 0.$$

2. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c, а сума синусів гострих кутів – m.

3. Двоє грають у гру. Перший називає 3 будь-які числа, відмінні від 0, а другий на власний розсуд ставить їх на місце зірочок у виразі
$$*x^2+*x+*.$$
Перший виграє, якщо утворений при цьому квадратний тричлен має два різні раціональні корені. Доведіть, що він може досягти перемоги.

4. Сума двох непарних чисел ділиться на 15. Якою цифрою закінчується сума кубів цих чисел?

5. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} y^2 = x^3-3x^2+2x, \\ x^2 = y^3-3y^2+2y. \end{cases}$$

III етап

6. Розв'язати рівняння
$$\left[x+\left[x+\ldots+\left[x+[x]\right]\right]\right]=\left|x+|x|+\ldots+|x+|x|\right|\right|,$$
де $[x]$— найбільше ціле число, що не перевищує x, якщо в лівій частині рівняння одинадцять знаків «+», а в правій – десять знаків «+».

7. Прямокутник $ABCD$ зігнуто по діагоналі AC так, що площини DAC і BAC перпендикулярні. Відомо, що $AB=a, AD=b$. Знайти кут між прямими AC і BD.

8. При яких значеннях параметра a нерівність
$$\cos 2x+2a\cos x+4a-13<0$$
виконується в інтервалі $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$?

9. У трикутній піраміді усі чотири грані мають однакову площу. Довести, що вони рівні.

10. Знайти всі функції f такі, що рівність
$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(y^{2008}-x\right)+xf\left(y\right)$$
виконується для всіх дійсних x, y, а рівняння $f(x)=0$ має тільки один розв'язок.

Розділ II. РОЗВ'ЯЗАННЯ, ВКАЗІВКИ, ВІДПОВІДІ

2000 – 2001 навчальний рік

VII КЛАС

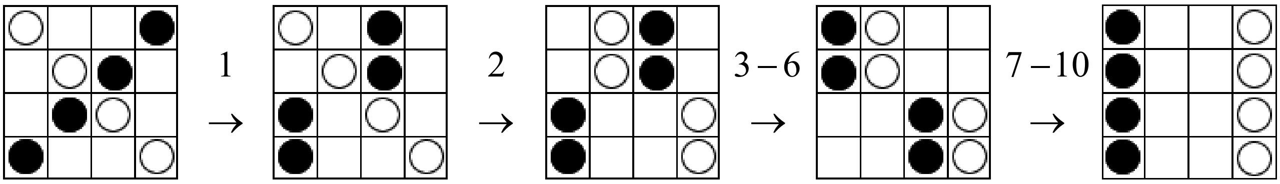
1. Нехай n – утворене число, а n_k – задане число, яке стоїть у ньому на k-му місці. Тоді сума цифр чисел n_k і n_{19-k}, $k = 1, 2, ..., 9$, дорівнює 10 (якщо, наприклад $k = 3$, то $n_3 = 3, n_{19-3} = n_{16} = 16$ і $3 + 1 + 6 = 10$), а сума цифр числа n дорівнює 90. Тому утворене число ділиться на 9, а отже, й на 3. **2.** Для перемоги Оксані треба грати симетрично відносно точки O перетину діагоналей таблиці, тобто зафарбовувати клітинки, симетричні відносно точки O тим клітинкам, які зафарбував Тарасик. **3.** Розв'яжемо рівняння відносно x:

$$x = \frac{y}{y-1}.$$

Оскільки $y-1$ і y послідовні цілі числа, то їхня частка буде цілим числом тільки тоді, коли $y-1=-1$ або $y-1=1$. Тому $x = y = 0, x = y = 2$ – всі цілі розв'язки рівняння. **4.** Налили 84 л, можна долити 14 л.
5. $\overline{abcabc} = 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 a + 10b + c = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$. **6.** –0,5.
7. $a = 36, b = 48$. **8.** Якщо в пачці n аркушів, то найменший час для підрахунку 120 аркушів дорівнює меншому з чисел n і $n-120$. **9.** *Ні, не може.* Периметр таких многокутників кратний чотирьом, а число 102 не ділиться без остачі на 4.
10. *220 км.* За властивостями сторін трикутника

$$220 = BC - AC \le AC \le AD + DC = 220.$$

11. *17.* $111111 = 3 \cdot 33333 + 3 \cdot 3333 + 3 \cdot 333 + 3 \cdot 33 + 3 \cdot 3 + 3 + 3$. **12.** *а*) *Так, це можна зробити* (мал. 1). *б*) *Ні, не можна. 1-й спосіб.* Зафарбуємо через одну клітинки таблиці, надаючи їй вигляду шахівниці. Після кожного ходу парність числа клітинок білого й чорного кольорів, на яких стоять білі й чорні шашки, не змінюється і є інваріантом. Оскільки на таблиці 3) всі білі шашки стоять на клітинках однакового кольору, тобто число клітинок парне, а на таблиці 4) вони стоять на 3-х білих і на 3-х чорних, то відповідь негативна. *2-й спосіб.* Впишемо в чорні клітинки числа "–1", а в білі – "1". Добуток чисел клітинок, на яких стоять білі шашки, дорівнює 1 і не змінюється при виконанні ходів. Цей добуток є інваріантом. У таблиці 4) добуток чисел клітинок, на яких стоять білі шашки, дорівнює –1. Тому за допомогою зазначених ходів одержати таблицю 4) не можна.



Мал. 1

13. *а*) Запишемо суму квадратів чисел так:

$$1^2+2^2+\ldots+7^2+8^2+(8+1)^2+(8+2)^2+\ldots+(8+7)^2.$$

Після піднесення до степеня матимемо суму

$$1^2+2^2+\ldots+7^2+8^2+7\cdot 8^2+2\cdot 8(1+2+\ldots+7)+1^2+2^2+\ldots+7^2.$$

Числа 1, 2, ..., 7 розіб'ємо на дві групи так, щоб суми чисел в кожній групі були однакові: $2+3+4+5=1+6+7=14$. Утворимо суми S_1 і S_2:

$$S_1=1^2+(2+8)^2+(3+8)^2+(4+8)^2+(5+8)^2+6^2+7^2=$$
$$=1^2+10^2+11^2+12^2+13^2+6^2+7^2,$$
$$S_2=8^2+(1+8)^2+2^2+3^2+4^2+5^2+(6+8)^2+(7+8)^2=$$
$$=8^2+9^2+2^2+3^2+4^2+5^2+14^2+15^2.$$

Легко переконатися, що $S_1=S_2=620$.

б) Використовуючи міркування попереднього пункту, запишемо суму так:

$$1^2+2^2+\ldots+999^2=\left(1^2+\ldots+499^2\right)+500^2+\left((500+1)^2+\ldots+(500+499)^2\right)=$$
$$=\left(1^2+\ldots+499^2\right)+500^2+499\cdot 500^2+2\cdot 500(1+2+\ldots+499)+\left(1^2+\ldots+499^2\right).$$

Оскільки $1+2+\ldots+499=\dfrac{1+499}{2}\cdot 499=2\cdot 62375$, то з чисел 1, 2, ..., 499 виділимо 250 послідовних чисел, сума яких дорівнює 62375:

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+250)=62375\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)+(n+250)}{2}\cdot 250=62375\Rightarrow n=124.$$

Такими числами є числа 125, 126, ..., 374. Маємо

$$125+126+\ldots+374=(1+2+\ldots+124)+(375+376+\ldots+499)=62375.$$

Утворимо суми S_1 і S_2, де

$$S_1=\left(1^2+2^2+\ldots+124^2\right)+\left((500+125)^2+\ldots+(500+374)^2\right)+\left(375^2+\ldots+499^2\right),$$
$$S_2=\left(125^2+\ldots+374^2\right)+\left(500^2+(500+1)^2+\ldots+(500+124)^2\right)+$$
$$+\left((500+375)^2+\ldots+(500+499)^2\right).$$

Можна переконатися, що ці суми рівні. Тому

$$1^2+\ldots+124^2+375^2+\ldots+499^2+625^2+\ldots+874^2=$$
$$=125^2+\ldots+374^2+500^2+\ldots+654^2+875^2+\ldots+999^2.$$

VIII КЛАС

1. $\frac{127}{210}\cdot$Обчислимо значення виразу, враховуючи, що $\frac{n^3-1}{(n+1)^3+1}=\frac{n-1}{n+2}$:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{20^3-1}{20^3+1}=$$

$$=\frac{1}{2^3+1}\cdot\frac{2^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{5^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{6^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{19^3-1}{20^3+1}\cdot\left(20^3-1\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{16}{19}\cdot\frac{17}{20}\cdot\frac{18}{21}\cdot\left(20^3-1\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3}{19\cdot20\cdot21}\cdot\left(20^3-1\right)=\frac{127}{210}.$$

2. Нехай учень правильно розв'язав p задач, не правильно розв'язав n задач і не розв'язував m задач. Тоді приходимо до такої системи: $\begin{cases}8p-5n=26,\\ p+n+m=20.\end{cases}$

З першого рівняння маємо $n=\frac{8p-26}{5}=(2p-5)-\frac{2p+1}{5}$. Оскільки n – ціле число, то число $\frac{2p+1}{5}$ також повинно бути цілим. Це може бути тільки тоді, коли $p=2,7,12,17,\ldots$. Враховуючи, що n – додатне і $p+n\le 20$, отримуємо: $p=7, n=6, m=7$. Отже, учень розв'язував 13 задач.

3. (0; 0), (2; 2).

$$xy=x+y\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1,\\ y-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1,\\ y-1=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

4. *15*. Присвоїмо кожному учневі номер, під яким його прізвище міститься в шкільному журналі. Посадимо учнів за партами за такою схемою:

1-й місяць	1; 2	3; 4	5; 6	…	27; 28	29; 30,
2-й місяць	1; 4	3; 6	5; 8	…	27; 30	29; 2,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
15-й місяць	1; 30	3; 2	5; 4	…	27; 26	29; 28.

Зрозуміло, що жодна з пар учнів протягом 15 місяців не буде повторюватися і всі пари чисел $2n-1; 2k,$ в яких $n,k=1,2,\ldots,15,$ вичерпані. Тому наступного місяця за кожною партою повинні сидіти учні, номери яких мають однакову парність. Оскільки і парних, і непарних номерів 15, то за якоюсь партою сидітимуть учні, номери яких мають різну парність, а отже, вони вже сиділи поруч. **5.** $2\sqrt{2000}>\sqrt{1999}+\sqrt{2001}.$ Нехай $a=\sqrt{1999}+\sqrt{2001},\quad b=2\sqrt{2000}.$ Тоді

$$(b-a)(b+a)=b^2-a^2=8000-\left(1999+2\sqrt{1999}\sqrt{2001}+2001\right)=$$

$$=1999-2\sqrt{1999}\sqrt{2001}+2001=\left(\sqrt{1999}-\sqrt{2001}\right)^2>0\Rightarrow b>a.$$

6. Сума цифр числа 10^n+8 дорівнює 9, а тому це число при будь-якому $n\in\mathbf{N}$ ділиться на 9. **7.** Якщо гру починає Наташа, то виграє Таня. Для цього їй досить застосувати симетричну стратегію гри. Ромашку можна розглядати як фігуру, що має осьові симетрії. Їх разом 23 – стільки, скільки пелюсток у ромашки. Наташа, починаючи гру, не порушить симетрію відносно однієї з цих осей. Таня своїм першим ходом також може не порушити симетрію. Для цього їй треба так зірвати одну або дві пелюстки, щоб між зірваними пелюстками на ромашці залишилося по 10 пелюсток. Другим ходом Наташа вже змушена порушити симетрію. Відповідаючи на кожний хід Наташі, Таня щоразу може поновлювати симетрію ігрових позицій, що, врешті-решт, забезпечить їй перемогу в грі. **8.** Утворимо систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1992,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=z,\end{cases}$ де z – нова змінна. Тоді

$$\begin{cases}\sqrt{x}=\dfrac{1992+z}{2},\\ \sqrt{y}=\dfrac{1992-z}{2},\\ |z|\le 1992\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\left(\dfrac{1992+z}{2}\right)^2,\\ y=\left(\dfrac{1992-z}{2}\right)^2,\ |z|\le 1992.\end{cases}$$

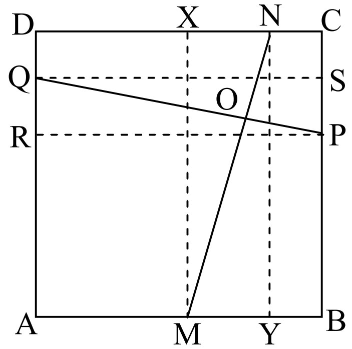
Оскільки x і y повинні бути цілими числами, то z повинно бути парним числом: $z=2n$, де $n=0,\pm1,\ldots,\pm996$.

Відповідь: $x=(996+n)^2,\ y=(996-n)^2$, де $n=0,\pm1,\ldots,\pm996$.

9. Нехай n і k – довжини сторін прямокутника. Тоді

$$nk=2(n+k)\Leftrightarrow(n-2)(k-2)=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}n-2=2,\\ k-2=2,\end{cases}\\ \begin{cases}n-2=1,\\ k-2=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}n=4,\\ k=4,\end{cases}\\ \begin{cases}n=3,\\ k=6.\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким чином, шуканими прямокутниками є квадрат зі стороною 4 і прямокутник 3×6. **10.** 1. **11.** 12 км. **12.** *Ні, не існують*. Остача від ділення куба цілого числа на 9 може дорівнювати 0, 1 або 8. Тому остача від ділення лівої частини рівняння на 9 може дорівнювати 0, 1, 2, 7 або 8, а остача від ділення 2001 на 9 дорівнює 3.



Мал. 2

13. Використовуючи мал. 2, отримаємо:

$$\left(P_{AMOQ}+P_{CPON}\right)-\left(P_{BNOP}+P_{DNOQ}\right)=$$
$$=\left(AQ-BP\right)+\left(CP-QD\right)-\left(MB-NC\right)-\left(DN-AM\right)=$$
$$=\left(QR+SP\right)-\left(XN+MY\right)=2\left(QR-MY\right)=0,$$

бо $\Delta QRP=\Delta MYN$. **14.** *Ні, не зможе*. Купі з n сірників поставимо у відповідність квадрат зі стороною n. Розбиття купи на m та k сірників інтерпретуємо як поділ цього квадрата на два квадрати зі сторонами m та k і два прямокутники зі сторонами m та k. Один із цих прямокутників заштрихуємо. Його площа дорівнює числу mk, яке записують після здійснення ходу. При цьому кожен раз будемо заштриховувати саме той прямокутник, який лежить нижче діагоналі початкового квадрата. Після завершення гри заштрихованою буде площа $\frac{1}{2}\cdot 2001^2-\frac{1}{2}\cdot 2001=1000\cdot 2001$ і вона не залежить від порядку зроблених ходів. Подумайте чому.

IX КЛАС

1. $\frac{1}{2^3+1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{99\cdot 100\cdot 101}\left(100^3-1\right)$. *Див. задачу 1 для 8-го класу*. **2.** Оскільки $[x]+\{x\}=x$, то $x+[x]+\{x\}+3|x|=2x+3|x|$. Тому функцію можна записати так:

$$y=\begin{cases}5x, \text{ } якщо \text{ } x\geq 0,\\ -x, \text{ } якщо \text{ } x<0.\end{cases}$$

Її графік міститься на мал. 3. **3.** Розв'язок $(x;y)$ рівняння, де $x\neq 0; y\neq 0$, породжує ще три розв'язки $(-x;-y)$, $(x;-y)$, $(-x;y)$. Тому спочатку розв'язуватимемо рівняння на множині натуральних чисел. Для цього рівняння запишемо так:

$$(y-x)(y+x)=2000.$$

Очевидно, що числа x, y мають однакову парність і $y>x$. Розкладемо 2000 на добуток двох множників однакової парності і візьмемо тільки ті добутки, в яких другий множник більший за перший:

$$2000=2\cdot 1000=4\cdot 500=8\cdot 250=10\cdot 200=20\cdot 100=40\cdot 50.$$

Розглянемо сукупність таких систем рівнянь:

$$\begin{cases}y-x=2,\\ y+x=1000,\end{cases}\quad \begin{cases}y-x=4,\\ y+x=500,\end{cases}\quad \begin{cases}y-x=8,\\ y+x=250,\end{cases}$$
$$\begin{cases}y-x=10,\\ y+x=200,\end{cases}\quad \begin{cases}y-x=20,\\ y+x=100,\end{cases}\quad \begin{cases}y-x=40,\\ y+x=50.\end{cases}$$

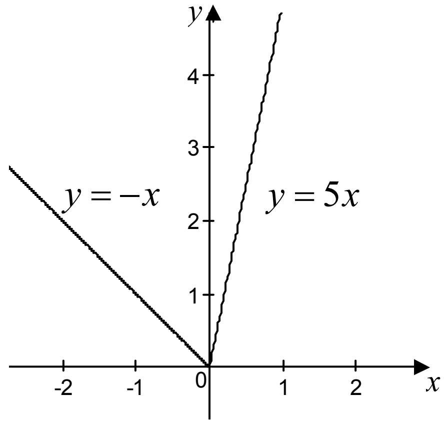
Розв'язки $(499;501), (248;252), (121;129), (95;105), (40;60), (5;45)$ систем сукупності є цілими додатними розв'язками даного рівняння, ще 18 розв'язків рівняння отримаємо, комбінуючи знаки „+" і „–" у цих розв'язках.

4. Помістимо коло в систему координат так, щоб його центр був у точці $(0;R)$, а дотична співпала з віссю абсцис (мал. 4). Нехай точка N має координати x і y.

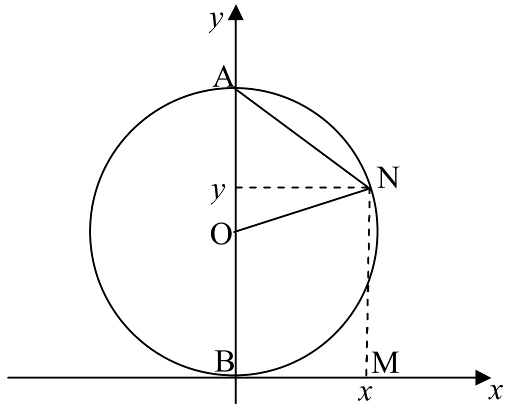
Тоді

$$\begin{cases} x^2 + (y-R)^2 = R^2, \\ x^2 + (2R-y)^2 = y^2. \end{cases}$$

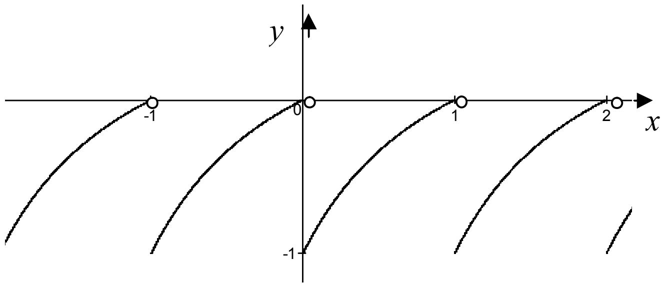
Розв’язуючи систему рівнянь, знаходимо два її розв’язки $\left(\pm 2R\sqrt{\sqrt{5}-2};\ R(\sqrt{5}-1)\right)$, які й визначають положення на колі шуканих точок.



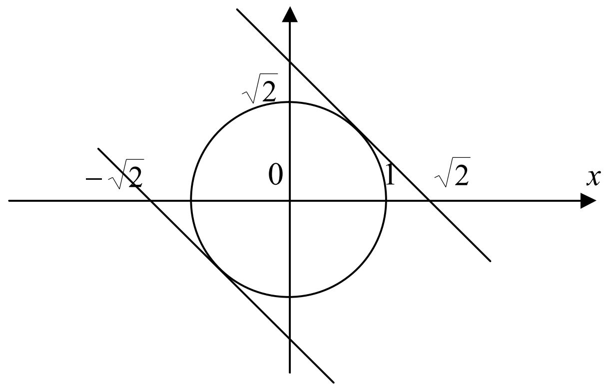
Мал. 3



Мал. 4



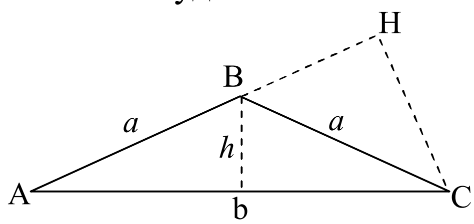
Мал. 5



Мал. 6

5. $$2+2^3+2^5+\ldots+2^{99}=(2+2^3)+(2^5+2^7)+\ldots+(2^{97}+2^{99})=$$
$$=2(1+2^2)+2^5(1+2^2)+\ldots+2^{97}(1+2^2)=5(2+2^5+\ldots+2^{97})\,\vdots\,5.$$

6. Оскільки $\{x\}=x$, якщо $0\le x<1$, і $\{x+n\}=\{x\}$ для всіх дійсних чисел x і цілих чисел n, то для побудови графіка функції $y=\dfrac{\{x\}-1}{\{x\}+1}$ спочатку треба побудувати графік функції $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ на проміжку $[0;1)$, а потім його періодично продовжити на всю числову вісь (мал. 5). **7**. Графіком першого рівняння системи є бісектриса другого і четвертого координатних кутів, зміщена по осі ординат на a одиниць; графіком другого рівняння є одиничне коло з центром у початку координат (мал. 6). Розв’язком системи рівнянь є координати спільних точок прямої й кола. Тому система не сумісна, якщо $|a|>\sqrt{2}$, має один розв'язок $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ для $a=\pm\sqrt{2}$, два розв'язки $\left(\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2};\frac{a\mp\sqrt{2-a^2}}{2}\right)$ для всіх $a\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **8.** Хлопчик, котрий починає гру, виграє, якщо після кожного свого ходу залишатиме на столі сірники, кількість яких кратна числу 3. **9.** *Так, існує.* Зокрема, площа рівнобедреного тупокутного трикутника ABC (мал. 7) з висотами $h<H<1$ буде більшою за 100 см^2, якщо $aH>200$.



Мал. 7

10. *1-й спосіб.* Зрозуміло, що a і b – додатні числа. Тому $|a|=a, |b|=b$ і

$$\frac{|a|}{\sqrt{b}}+\frac{|b|}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\left(\frac{|a|}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)+\left(\frac{|b|}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)=\frac{a-b}{\sqrt{b}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}}=$$

$$=(a-b)\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\geq 0\Rightarrow \frac{|a|}{\sqrt{b}}+\frac{|b|}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

2-й спосіб. Доведемо нерівність, послаблюючи ліву частину за допомогою співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним:

$$\frac{|a|}{\sqrt{b}}+\frac{|b|}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\left(\frac{|a|}{\sqrt{b}}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}+\frac{|b|}{\sqrt{a}}\right)-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{|a|}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}}+2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{|b|}{\sqrt{a}}}-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{b}}+\frac{|b|}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

11. (0; 1), (1; 0). *1–й спосіб.* Нехай $x\geq 0, y\geq 0$. Тоді

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ [x]+[y]=1.\end{cases}$$

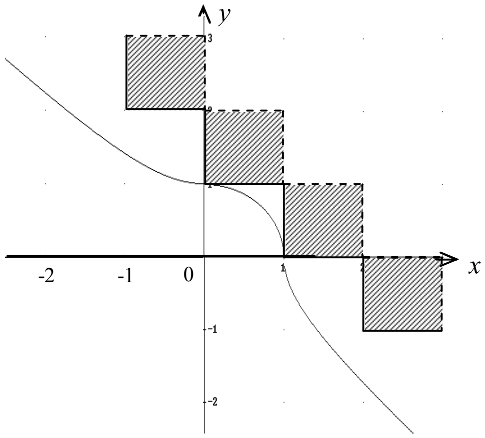
Ця система рівносильна сукупності двох наступних систем:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ [x]=0,\\ [y]=1;\end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases}x^2+y^2=1,\\ [x]=1,\\ [y]=0,\end{cases}$$

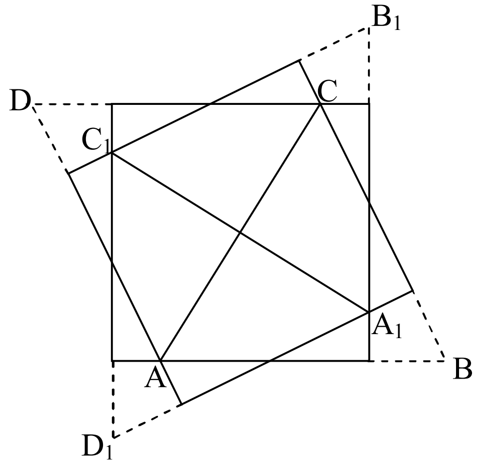
з яких маємо два розв'язки заданої системи: (0; 1) і (1; 0). Якщо $x>0, y<0$, то отримуємо таку систему:

$$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ [x]+[y]=1.\end{cases}$$

З першого рівняння маємо, що $x > 1$, бо $x^2 = 1 + y^2$, а тому $x + y = \dfrac{1}{x - y} < 1$; з другого рівняння маємо нерівність $x + y \geq [x] + [y] = 1$, бо $x \geq [x], y \geq [y]$. Наслідком цих нерівностей є суперечність $x + y < x + y$, яка означає, що в цьому випадку система несумісна.



Мал. 8



Мал. 9

Аналогічно встановлюється несумісність системи у випадку, коли $x < 0, y > 0$. Якщо $x < 0, y < 0$, то несумісність системи очевидна.

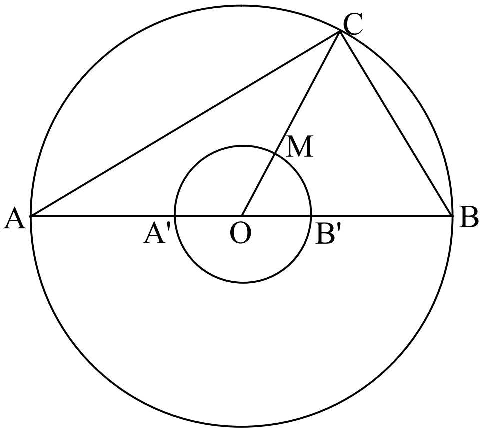
2-й спосіб. Розв'язання проведемо графічно. Графіком першого рівняння є крива, що складається з дуг двох рівнобічних гіпербол і дуги кола (мал. 8). Ці дуги задані системами, що випливають з першого рівняння:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y < 0, \\ x^2 - y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \\ y^2 - x^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

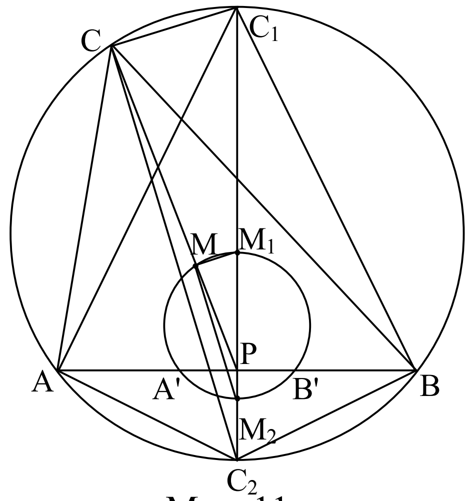
Друге рівняння рівносильне рівнянню $[x] = -[y - 1]$. Якщо $k \leq x < k + 1, k \in Z$, то $[x] = k$, а $-k \leq y - 1 < -k + 1$ і $1 - k \leq y < 2 - k$. Тому графіком другого рівняння є множина точок $(x; y)$ координатної площини, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} k \leq x < k + 1, \\ 1 - k \leq y < 2 - k, k \in Z. \end{cases}$$

Ці точки утворюють одиничні квадрати, вони показані на мал. 8. З малюнка видно, що графіки рівнянь системи мають дві спільні точки $(0; 1)$ і $(1; 0)$, а отже, система рівнянь – два розв'язки. **12.** Продовжуючи належним чином сторони квадратів (мал. 9) отримаємо паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. При цьому діагоналі AC і A_1C_1 восьмикутника, які розбивають його на 4 чотирикутники, будуть діагоналями утворених паралелограмів. Оскільки паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні, а їхні сторони взаємно перпендикулярні, то діагоналі AC і A_1C_1 також взаємно перпендикулярні. **13.** Нехай A і B – фіксовані точки кола ω радіуса R з центром у точці O, C – точка, яка рухається по колу, M – точка перетину медіан трикутника ABC. Якщо AB – діаметр кола, то CO – медіана трикутника. Тоді за властивістю точки перетину медіан трикутника $MO = \frac{1}{3}R$. Тому шуканим геометричним місцем точок є коло радіуса $\frac{1}{3}R$ з центром у точці O, з якого вилучені точки A' і B' (мал. 10). Далі зупинимося на випадку, коли AB – довільна хорда кола. Нехай C_1C_2 – діаметр кола, перпендикулярний до цієї хорди, M_1 і M_2 – точки перетину медіан трикутників ABC_1 і ABC_2 відповідно. Тоді $M_1M_2 = \frac{2}{3}R$. Доведемо, що у цьому випадку шуканим геометричним місцем точок є коло ω' з діаметром M_1M_2, з якого виколоті точки A' і B' (мал. 11). Нехай P – середина хорди AB, C – довільна точка кола ω, відмінна від точок A і B, M – точка перетину медіан трикутника ABC. Тоді $CM : MP = 2:1 = C_1M_1 : M_1P$.

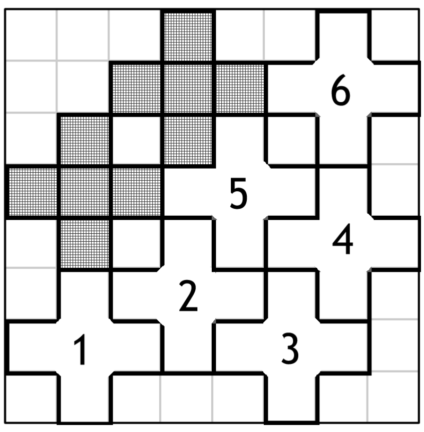


Мал. 10

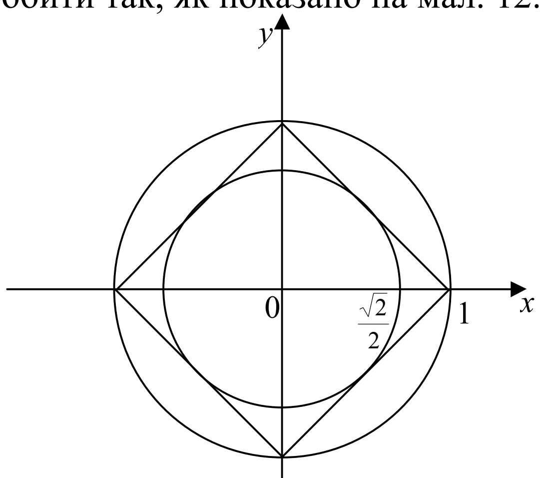


Мал. 11

Тому трикутники CPC_1 і MPM_1 – подібні, а їхні сторони CC_1 і MM_1 – паралельні. Аналогічно доводиться паралельність сторін CC_2 і MM_2. Отже, $\angle M_1MM_2 = \angle C_1CC_2 = 90°$, а тому точка M міститься на колі ω', що й треба було довести.**14.** 8. Це, зокрема, можна зробити так, як показано на мал. 12.



Мал. 12



Мал. 13

X КЛАС

1. $\frac{25\pi}{9}$. **2.** Доведення подільності проведемо методом математичної індукції. При $n=1$ твердження правильне. Припустимо, що $2^{3^n}+1$ ділиться на 3^{n+1} для $n>1$. Тоді

$$2^{3^{n+1}}+1=\left(2^{3^n}\right)^3+1=\left(2^{3^n}+1\right)\left(\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1\right)=\left(2^{3^n}+1\right)\left(\left(2^{3^n}+1\right)^2-3\cdot 2^{3^n}\right)\vdots 3^{n+2},$$

бо перший множник ділиться на 3^{n+1} за припущенням, а другий множник ділиться на 3, бо кожний його доданок ділиться на 3. Тому згідно з методом математичної індукції вираз $2^{3^n}+1$ ділиться на 3^{n+1} при кожному натуральному числі n. **3.** Нехай $p^2<n<(p+1)^2$, де $p\in N$. Тоді $p<\sqrt{n}<p+1$, а тому $[\sqrt{n}]=p$ і $\{\sqrt{n}\}=p-\sqrt{n}\neq 0$. Задана нерівність рівносильна нерівності $2\sqrt{n}\{\sqrt{n}\}>1$, яку й будемо доводити:

$$2\sqrt{n}\{\sqrt{n}\}=2\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-p\right)=2\left(\sqrt{n}\right)^2-2\sqrt{n}p=$$

$$=\left(\sqrt{n}\right)^2+\left(\sqrt{n}\right)^2-2\sqrt{n}p+p^2-p^2=\left(\sqrt{n}-p\right)^2+\left(n-p^2\right)>n-p^2\geq 1.$$

Нерівність доведено. **4.** За 4 спроби можна напевно визначити ключ від першого замка, за 3 – від другого і т.д. Тому за 10 спроб напевно можна визначити ключі від кожного замка. **5.** Нехай S – шукана сума. Якщо $x=1$, то $S=\frac{n(n+1)}{2}$. Якщо $x\neq 1$, то з рівності

$$(1-x)S=\left(1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}\right)(1-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)S=\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)-nx^n,$$

використовуючи формулу суми перших членів геометричної прогресії

$$1+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x},$$

Маємо $S=\frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. **6.** Графіком першого рівняння системи є квадрат, а другого – коло радіуса $\sqrt{a}$ з центром в початку координат (мал. 13). Розв'язком системи рівнянь є координати спільних точок графіків рівнянь. Якщо $a=\frac{1}{2}$ або $a=1$, то система має чотири розв'язки, якщо $\frac{1}{2}<a<1$ – вісім розв'язків. При інших значеннях параметра a система несумісна. **7.** 40. Якщо $a=\overline{a_1a_2a_3}$, $b=\overline{b_1b_2b_3}$ – числа, які записані на кілометрових стовпцях, то

$$a+b=100\left(a_1+b_1\right)+10\left(a_2+b_2\right)+\left(a_3+b_3\right)=999.$$

Тому $a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=9$. Це означає, що нас цікавитимуть тільки числа, записані цифрами 0 і 9, 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5. З кожної пари цифр n і k можна утворити 8 пар чисел, які відповідають умові задачі: $\overline{xxx},\overline{yyy}$; $\overline{xxy},\overline{yyx}$; ... $\overline{yyy},\overline{xxx}$, з 8 пар – 40 пар чисел. **8.** Функція f бієктивна – різним значенням аргументу ставить у відповідність різні свої значення: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. (У противному разі мали б суперечність: $2000 - x_1 = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = 2000 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$). З неперервності і бієктивності випливає, що $f(x)$ – строго монотонна функція, а складена функція $f\big(f(x)\big)$ – зростаюча. Оскільки функція $y = 2000 - x$ спадна, то рівність $f\big(f(x)\big) = 2000 - x$ не може виконуватися для неперервних функцій.

9. Якщо a, b – довжини сторін основи, c – довжина бічного ребра, то матимемо систему діофантових рівнянь:

$$\begin{cases} abc = 2(ab + bc + ca), \\ abc = 16(a + b + c); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(ab - 2a - 2b) = 2ab, \\ c(ab - 16) = 16(a + b); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ab - 2a - 2b)(8a + 8b) = ab(ab - 16) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a^2 - 8a + 16) - 8(a - 2)ab + 16a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (ab - 4a - 4b)^2 = 16ab.$$

Права частина одержаного рівняння буде квадратом цілого додатного числа тільки тоді, коли $b = p^2 a$, де p – ціле додатне число. Запишемо це рівняння так:

$$(ap^2 - 4p^2 - 4)^2 = 16p^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ap^2 - 4p^2 - 4 = 4p, \\ ap^2 - 4p^2 - 4 = -4p; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 + \dfrac{4(1+p)}{p^2}, \\ a = 4 + \dfrac{4(1-p)}{p^2}. \end{array}\right.$$

Рівняння отриманої сукупності матимуть цілі розв'язки, якщо $\dfrac{4(1+p)}{p^2} \geq 1$ і $\dfrac{4(1-p)}{p^2} \leq -1$. Звідси знаходимо, що $p \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $p = 1$ матимемо $a = 12, b = 12$ і $a = 4, b = 16$; коли $p = 2$, то $a = 7, b = 28$ і $a = 3, b = 12$. При інших значеннях p значення a будуть дробові. Далі з одного з рівнянь системи визначаємо c. Якщо $a = 12, b = 12$, то $c = 3$; при $a = 3, b = 12$ маємо $c = 12$. Отже, шуканим є єдиний паралелепіпед зі сторонами 3, 12, 12. **10.** У лівій частині рівняння замінимо добутки синусів на суми косинусів. Після виконання очевидних тотожних перетворень маємо:

$$\cos n(n+1)x = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi + 2\pi k}{n(n+1)}, \quad n \in N, k \in Z.$$

11. *а*) $$a(n)a(n+1) = \big(n^2 + n + 1\big)\big((n+1)^2 + (n+1) + 1\big) =$$

$$= n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 6n + 3 = \big(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\big) + \big(n^2 + 2n + 1\big) + 1 =$$

$$= (n+1)^4 + (n+1)^2 + 1 = \big((n+1)^2\big)^2 + (n+1)^2 + 1 = a\big((n+1)^2\big).$$

б) Нехай $n = 10^4, k = 10^5$. Тоді $a(n)a(k) = \big(10^8 + 10^4 + 1\big)\big(10^{10} + 10^5 + 1\big) \vdots 9$, бо $\big(10^8 + 10^4 + 1\big) \vdots 3$ і $\big(10^{10} + 10^5 + 1\big) \vdots 3$. Припустимо, що $a(n)a(k) \in S$. Тоді існує $p \in N$ таке, що $a(p) = a(n)a(k) \Leftrightarrow p^2 + p + 1 - a(n)a(k) = 0$. Звідси $p = \dfrac{-1 + \sqrt{D}}{2}$, де $D = 1 - 4(1 - a(n)a(k)) = a(n)a(k) - 3$. Оскільки D ділиться на 3 і не ділиться на 9, то дискримінант не може бути квадратом цілого числа, а тому p не є цілим числом. Отже, $a(10^4)a(10^5) \notin S$. **12**. *1-й спосіб.*

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-(a+b+c+d)e=$$

$$\left(a^2-ae+\frac{e^2}{4}\right)+\left(b^2-be+\frac{e^2}{4}\right)+\left(c^2-ce+\frac{e^2}{4}\right)+\left(d^2-de+\frac{e^2}{4}\right)=$$

$$=\left(a-\frac{e}{2}\right)^2+\left(b-\frac{e}{2}\right)^2+\left(c-\frac{e}{2}\right)^2+\left(d-\frac{e}{2}\right)^2\ge 0.$$

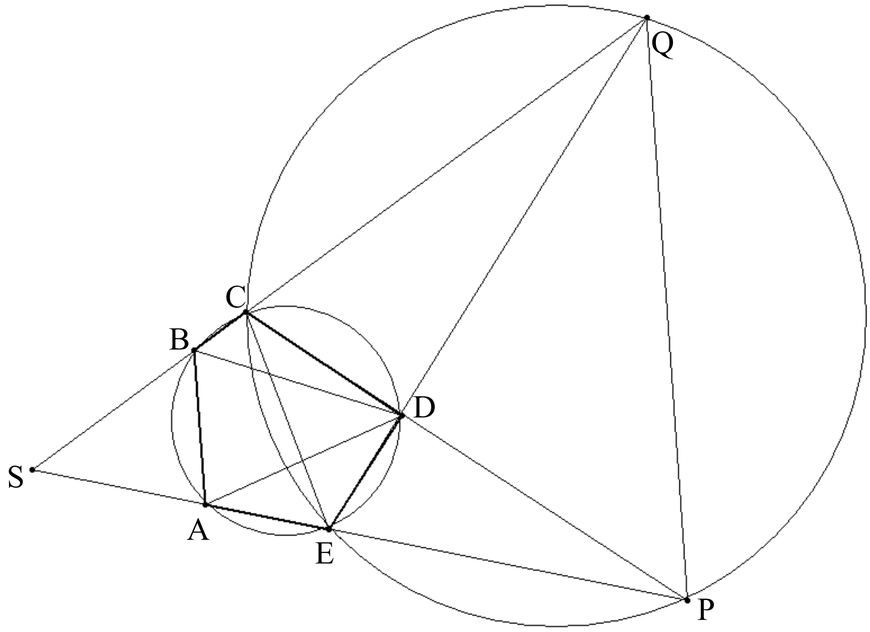
2-й спосіб.

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\left(a^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(b^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(c^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(d^2+\frac{e^2}{4}\right)\ge$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{a^2e^2}{4}}+2\sqrt{\frac{b^2e^2}{4}}+2\sqrt{\frac{c^2e^2}{4}}+2\sqrt{\frac{d^2e^2}{4}}=$$

$$=|ae|+|be|+|ce|+|de|\ge(a+b+c+d)e.$$

13. Нехай прямі AE і BC перетинаються в точці S (мал. 14).



Мал. 14

Оскільки

$$SA\cdot SE=SB\cdot SC\Leftrightarrow\frac{SA}{SB}=\frac{SC}{SE},$$

то трикутники SAB і SCE подібні. З паралельності прямих AB і PQ випливає подібність трикутників SAB і SPQ. Тому трикутники SEC і SQP також подібні, а $\angle PQC+\angle CEP=\angle SEC+\angle CEP=180^\circ$, $\angle SCE+\angle ECP=180^\circ$. Це дає підставу стверджувати, що навколо чотирикутника $CEPQ$ можна описати коло. Кути EPC і EQC стягуються дугою EC, а тому рівні. З подібності трикутників SCP і SEQ випливає рівність кутів PCS і QES. Чотирикутники $ABDE$ і

$ABCD$ вписані в коло. Тому $\angle ABD + \angle AED = 180° = \angle BAD + \angle BCD$, а $\angle ABD = \angle BAD$, тобто трикутник ADB – рівнобедрений. Отже, $AD = BD$.

14. Припустимо, що це можна зробити. Вважатимемо, що на початку вершина A_1 правильного 2001-кутника $A_1A_2...A_{2001}$ мала чорний колір. Нехай вершина A_k $(k = \overline{1, 2001})$ a_k разів обиралася „центральною” для описаних кроків. Оскільки після кожного кроку кількість чорних вершин змінюється на 1 або на 3, то загальна кількість кроків $S = a_1 + a_2 + ... + a_{2001}$ повинна бути непарним числом. Водночас $S = \sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_{667}$, де $\sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $\sigma_2 = a_4 + a_5 + a_6$, ..., $\sigma_{667} = a_{1999} + a_{2000} + a_{2001}$, є числом парним, бо σ_1 – число разів зміни кольору вершини A_2, σ_2 – число разів зміни кольору вершини A_5 і т.д. Одержана суперечність вказує на хибність зробленого припущення.

XI КЛАС

1. Якщо пряма на координатних осях відтинає відрізки a та b, то її рівняння можна записати так: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Оскільки точка $M(x_0; y_0)$ міститься на бісектрисі першого координатного кута й заданій прямій, то її координати рівні $x_0 = y_0$ і задовольняють рівняння прямої:

$$\frac{x_0}{a} + \frac{x_0}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x_0}.$$

2. *Див. задачу 2 для 10-го класу*. **3.** Для зручності закреслювати числа почнемо з 1. Після першого обходу залишаться парні числа 2, 4, ..., 2000. Кожне з них поділимо на 2 і частки 1, 2, ..., 1000 запишемо по колу так, як того вимагає умова задачі. Знову закреслимо непарні числа, а кожне з тих 500 парних чисел, які залишилися поділимо на 2 і частки 1, 2, ..., 250 запишемо по колу. У такий спосіб зробимо п’ять обходів кола. Перед початкам шостого обходу залишаться числа 1, 2, ..., 62. Роблячи наступні обходи кола, спочатку будемо закреслювати парні числа, потім числа, які при діленні на 4 дають остачу 3 і т.д. Неважко переконатися, що єдиним числом, яке залишиться з чисел 1, 2, ..., 62, буде 61. Помноживши це число на 2^5, отримаємо число 1952, яке залишиться з чисел 1, 2, ..., 2000. Якби першим закресленим числом була 2, то залишилося б число 1953. **4.** $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n, k \in Z.$ В області допустимих значень рівняння рівносильне такому:

$$3|tgx|^2 - 4\sqrt{3}|tgx| + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |tgx| = \sqrt{3}, \\ |tgx| = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Розв’язуючи отримані рівняння, матимемо розв’язки даного в умові рівняння.

5. $$x^2+2x\sin xy+1=0 \Leftrightarrow (x+\sin xy)^2+\cos^2 xy=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+\sin xy)^2=0,\\ \cos^2 xy=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\\ x=-\sin xy.\end{cases}$$

Відповідь: $-1;-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,\quad 1;\dfrac{\pi}{2}+(2n+1)\pi,\quad n\in Z.$

6. Доводити нерівність будемо методом математичної індукції. База індукції очевидна. Припустимо, що нерівність правильна для деякого $n\ge 2$. Враховуючи припущення, маємо:

$$(1+\alpha)^{n+1}=(1+\alpha)^n(1+\alpha)\ge\left(1+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2\right)(1+\alpha)=$$
$$=1+\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^3=1+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{2}{\alpha}+n^2-n+\alpha n^2-\alpha n\right)=$$
$$=1+\frac{\alpha^2}{2}\left(\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha n^2}{2}\right)+\frac{\alpha n^2}{2}+n^2-n-\alpha n\right)\ge 1+\frac{\alpha^2}{2}\left(2n+\frac{\alpha n^2}{2}+n^2-n-\alpha n\right)=$$
$$=1+\frac{\alpha^2}{2}\left(n^2+n+\frac{\alpha n^2}{2}-\alpha n\right)=1+\frac{\alpha^2}{2}\left(n^2+n+\frac{\alpha n}{2}(n-2)\right)\ge 1+\frac{\alpha^2 n(n+1)}{2},$$

бо за нерівністю Коші

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha n^2}{2}\ge 2\sqrt{\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha n^2}{2}}=2n.$$

Отже, ми довели нерівність $(1+\alpha)^{n+1}\ge 1+\dfrac{\alpha^2 n(n+1)}{2}$. Цим, враховуючи обраний спосіб доведення, доведено й задану нерівність. **7.** Графіком рівняння є об'єднання графіка функції $y=\dfrac{\{x\}-1}{\{x\}+1}$, який міститься на мал. 5 і графіка функції $y=-\dfrac{\{x\}-1}{\{x\}+1}$. **8.** Зінтегруємо рівність $S(t)=1+2t+3t^2+\ldots+nt^{n-1}$ у межах від 0 до x:

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(1+2t+3t^2+\ldots+nt^{n-1}\right)dt,$$
$$\int_0^x S(t)dt=x+x^2+\ldots+x^n.$$

За формулою суми перших членів геометричної прогресії маємо рівність:

$$x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},\quad x\ne 1.$$

Тому

$$\int_0^x S(t)dt=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Диференціюючи цю рівність, отримаємо $S(x)=\dfrac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, якщо $x\neq 1$.

Якщо $x=1$, то шукана сума є сумою перших n натуральних чисел $S(1)=\dfrac{(1+n)n}{2}$. (Задачу можна розв'язати іншим способом – див. задачу 5 для 10-го класу). **9.** *Див. задачу 9 для 10-го класу*. **10.** *Див. задачу 10 для 10-го класу.*
11. Задана рівність рівносильна такій:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

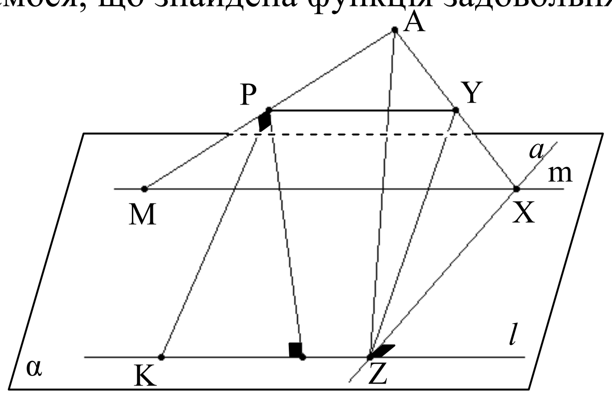
Нехай $b_k=a_{k+1}:a_k,\ k\in N$. Тоді $b_1=250, b_2=4$ і $b_{k+1}=b_kb_{k-1}$ для $k=2,3,\dots$. З одержаної рекурентної формули випливає, що всі $b_3,b_4,b_5,\dots$ цілі парні числа. Оскільки

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdot\ldots b_2\cdot b_1\cdot a_1,$$

то a_n – ціле число, яке ділиться на 2^n без остачі для будь-якого натурального числа n. **12.** Нехай f – шукана функція. Візьмемо довільний x, а $y=\frac{1}{2}\left(x^2-f(x)\right)$. Тоді $y+f(x)=x^2-y$ і задана рівність запишеться так:

$$4f(x)y=0\Leftrightarrow 4f(x)\cdot\frac{1}{2}\left(x^2-f(x)\right)=0.$$

Оскільки рівняння $f(x)=0$ має тільки один корінь, то отримана рівність виконуватиметься на всій множині дійсних чисел, якщо $f(x)=x^2$. Насамкінець перевіркою переконуємося, що знайдена функція задовольняє умови задачі.



Мал. 15

13. Наведемо конструктивне розв'язання задачі. Спочатку проведемо аналіз. Нехай m – шукана пряма, M і X – довільні точки цієї прямої, точки P та Y такі, що $MP=PA$, $AY=YX$ (мал. 15). Тоді пряма PY – паралельна прямій m, а отже, і прямій l. Далі опишемо алгоритм побудови прямої m. Проведемо через точку A перпендикулярно до прямої l площину β. Нехай площина β перетинає пряму l в точці Z, а з площиною α перетинається по прямій a. На прямій a виберемо точку X так, щоб $XZ=AZ$. Побудуємо точку Y – середину відрізка AX. Тоді $ZY \perp AX$ і $ZY \perp l$. Тому ZY – спільний перпендикуляр прямих AX і l. У площині α через точку X паралельно до прямої l проведемо пряму m. Доведемо, що m – шукана пряма. Для цього візьмемо на ній довільну точку M. Позначимо літерою P середину відрізка AM. Візьмемо на прямій l точку K так, щоб пряма PK була паралельна прямій YZ. Тоді пряма PK буде перпендикулярною до прямої l і до прямої AM, тобто відрізок PK спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l і AM. **14.** *Див. задачу 14 для 10-го класу.*

2001 – 2002 навчальний рік

VII КЛАС

1. Петрик купив 8 марок, а Василько – 10. **2.** Пофарбуємо у два кольори, наприклад білий і чорний, клітинки дошки й жуків, що сидять на них, за схемою шахівниці. Нехай білих клітинок – 40, а чорних жуків – 41. Чорні жуки переповзають на білі клітинки. Тому на якійсь білій клітинці буде щонайменше два чорні жуки. **3.** Якщо t – час руху теплохода озером, то приходимо до рівняння

$$\frac{9}{t}+3=\frac{20}{1-t},$$

з якого знаходимо $t=\frac{1}{3}$ год. Отже, швидкість теплохода 27 км/год. **4.** -5.

5. 48 см, 38 см, 38 см. **6.** Нехай у таблиці 2000 рядків і 2001 стовпець. Тоді в кожному рядку повинно бути не менше 1001 червоних клітинок, а всього червоних клітинок у таблиці – не менше 2002000. Водночас у кожному стовпці білих клітинок повинно бути більше 1000, а всього в таблиці – більше 2001000. Загальна кількість білих і чорних клітинок повинна бути більшою за 4003000. Але це неможливо, бо в таблиці всього 4002000 клітинок. Тому Незнайко сказав неправду. **7.**

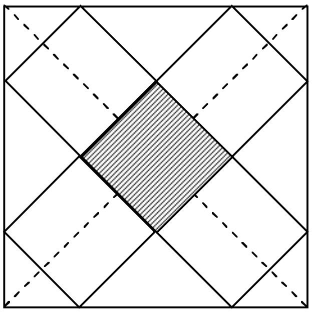
$$1+ab>a+b \Leftrightarrow (1-a)(1-b)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}1-a>0,\\ 1-b>0,\end{cases} \\ \begin{cases}1-a<0,\\ 1-b<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}|a|<1,\\ |b|<1.\end{cases}$$

8. Рівність рівносильна добутку $\overline{c2d}\cdot 13=\overline{2ab1}$. Звідси $d=7$, а $c=1$ або $c=2$. Оскільки $127\cdot 13=1651$, то $c=2$. За властивістю транзитивності з рівностей $227\cdot 13=\overline{2ab1}$ і $227\cdot 13=2951$ маємо рівність $\overline{2ab1}=2951$. Тому $a=9, b=5$.

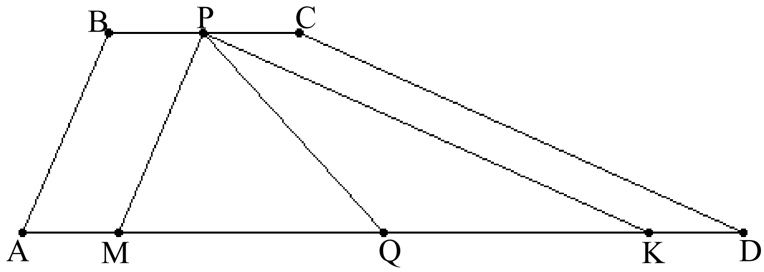
9. $31^{11}<32^{11}=\left(2^5\right)^{11}=2^{55}<2^{56}=\left(2^4\right)^{14}=16^{14}<17^{14}\Rightarrow 31^{11}<17^{14}$. **10.** Проміж 100 перших натуральних чисел 33 числа діляться на 3, 11 – на 9, 3 – на 27, 1 – на 81. Оскільки $33+11+3+1=48$, то добуток перших 100 натуральних чисел ділиться на 3^{48}. **11.** Помітимо точки літерами $A_1, A_2, ..., A_{49}, A_{50}$. Через точку A_{50}, можна провести 49 прямі, кожна з яких проходить через одну з точок $A_1, ..., A_{49}$; через точку A_{49} таких прямих можна провести 48 і т.д. Насамкінець через точки A_2 і A_1 – одну пряму. Всього ж можна провести $49+48+...+1=\frac{49+1}{2}\cdot 49=1225$ прямі. **12.** 990. **13.** Оскільки рівняння може мати тільки додатні корені, то $|x+2|=x+2, |2x+3|=2x+3$, а тому рівняння набуває вигляду

$$|x-1|+|x-3|+17=0.$$

Це рівняння не має розв'язків, бо сума двох невід'ємних і додатного доданків не може дорівнювати нулю. **14.** *Можна*. Для цього кубик потрібно розташувати на хустині так, як показано на мал. 16.



Мал. 16



Мал. 17

VIII КЛАС

1. Виразимо x через y: $x=\frac{2001-y}{20}=100+\frac{1-y}{20}$. Визначимо y так, щоб другий доданок суми був цілий: $\frac{1-y}{20}=k$. Для цього візьмемо $y=1-20k$, де k – ціле число. Тоді $x=100+k$. Пари чисел $100+k; 1-20k$, де $k\in Z$, утворюють множину цілих розв'язків рівняння. Розв'язавши систему нерівностей $100+k\geq 0, 1-20k\geq 0,$ знайдемо ті значення k, при яких цілі розв'язки будуть невід'ємними: $k=-100,-99,...,-1,0$. **2.** Нехай $S(n)=3^{2n+2}-8n-9$. Тоді $S(1)=3^{2\cdot 1+2}-8\cdot 1-9=64\,\vdots\,64$. Припустимо, що $S(k)\,\vdots\,64$ при $n=k\geq 2$. Доведемо, що $S(k+1)\,\vdots\,64$.

$$S(k+1)=3^{2(k+1)+2}-8(k+1)-9=9\cdot 3^{2k+2}-8k-17=$$
$$=9\cdot(3^{2k+2}-8k-9+8k+9-8k)-8k-17=9S(k)+64k+64\Rightarrow S(k+1)\,\vdots\,64.$$

Згідно з принципом математичної індукції $S(n)\,\vdots\,64$ для всіх натуральних чисел n. **3.** Після n-го кроку клаптиків стає $3n+4$. Оскільки рівність $3n+4=2001$ не може виконуватися при цілому значенні n, то підрахунок зроблено неправильно. **4.** Нехай точки P і Q – середини основ трапеції. Через точку P (мал. 17) проведемо прямі PM і PK, паралельно бічним сторонам трапеції.

Тоді $\angle KPM = 90°$. Тому точка P лежить на колі, діаметром якого є відрізок MK, центром – точка Q. Отже, $QM = QK = QP$, а $PQ = \frac{AD - BC}{2}$. **5.** Після рівносильних перетворень рівняння матимемо:

$$\frac{x^2 - 10x}{15(x-10)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x = 0, \\ 15(x-10) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

6. $$x^{10} + x^5 + 1 = x^{10} + x^5 + 1 + x^2 + x - x^2 - x = \left(x^{10} - x\right) + \left(x^5 - x^2\right) + x^2 + x + 1 =$$
$$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1\right).$$

7. Нехай x і y шукані числа. Вони повинні бути однакової парності й задовольняти рівність $x^2 - y^2 = 101010 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 101010$. Числа $x - y$ і $x + y$ парні, тому ліва частина останньої рівності ділиться на 4, число 101010 на 4 не ділиться без остачі. Тому на множині цілих чисел рівність $x^2 - y^2 = 101010$ не може виконуватися. **8.** Нехай довжина кожної сторони трикутника дорівнює 5 одиниць. Тоді $AM = BK = CP = 2$, $MB = KC = PA = 3$. Тому $\Delta AMP = \Delta MBK = \Delta KCP$ – за двома сторонами й кутом між ними. З рівності трикутників випливає рівність їхніх відповідних сторін: $MK = KP = PM$. Отже, трикутник MKP – рівносторонній.

9. $$\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + ... + \frac{1}{19 \cdot 20} =$$
$$= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13}\right) + ... \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}.$$

10. $x^4 + 1 = \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - 2x^2 = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$**.** **11.** Після рівносильних перетворень маємо таке рівняння: $\frac{(b+1)x - a}{x(x-a)} = 0$. Це рівняння, а отже, й дане рівняння має єдиний розв’язок $x = \frac{a}{b+1}$, якщо $a \neq 0, b \neq 0, b \neq -1$. Повертаючись до заданого рівняння, встановлюємо, що воно має нескінченну множину розв’язків $x \neq 0$, якщо $a = 0, b = -1$. При інших значеннях параметрів a та b розв’язки не існують.

12. $$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{x-1}\right)^2} + \sqrt{\left(1 - \sqrt{x-1}\right)^2} =$$
$$= \left|1 + \sqrt{x-1}\right| + \left|1 - \sqrt{x-1}\right| = 1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2,$$

бо $1 + \sqrt{x-1} \geq 0$ і $1 - \sqrt{x-1} \geq 0$, якщо $1 \leq x \leq 2$. **13.** Якщо M і N основи висот, проведених з вершини гострого кута A паралелограма $ABCD$, то

$$\angle ADC = \angle DAM + \angle DMA = \angle DAM + 90° = \angle DAM + \angle DAN = \angle MAN.$$

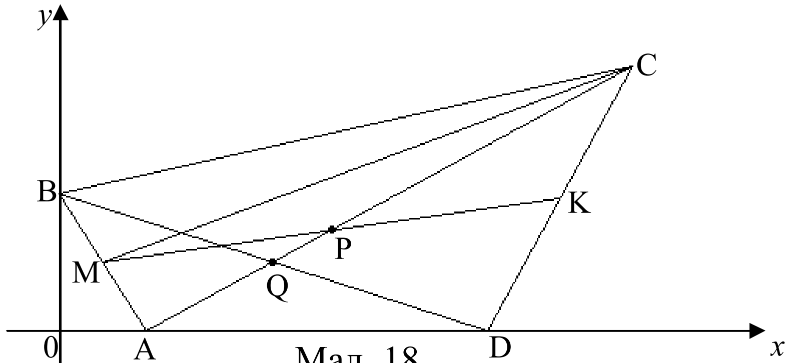
14. Нехай рік має 365 днів. Оскільки $365 = 7 \cdot 52 + 1$, то рік може починатися понеділком і понеділком завершуватися. Тому 53 – найбільше число понеділків, які можуть бути протягом року.

IX КЛАС

1. Зрозуміло, що невід'ємний розв'язок $(x;\, y)$ рівняння породжує ще три його розв'язки: $(-x;-y), (-x;\, y), (x;-y)$. Тому спочатку розв'яжемо рівняння на множині цілих невід'ємних чисел. Оскільки доданки лівої частини рівняння невід'ємні, то вони не можуть бути більші за їхню суму:

$$\begin{cases} 6x^2 \le 74, \\ 5y^2 \le 74, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 13, \\ y^2 < 15, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 3. \end{cases}$$

З парності суми й першого доданка випливає й парність y. Тому $y = 0$ або $y = 2$. У першому випадку рівняння $6x^2 = 74$ не має розв'язків на множині цілих невід'ємних чисел, а в другому випадку рівняння $6x^2 + 20 = 74$ має розв'язок $(3;\, 2)$. *Відповідь:* $(3;\, 2)$, $(-3;-2)$, $(-3;\, 2)$, $(3;-2)$. **2.** Нехай A – довільна внутрішня точка правильного п'ятикутника зі стороною a; $h_1, ..., h_4, h_5$ – висоти трикутників $A_1AA_2, ..., A_4AA_5, A_5AA_1$ відповідно, S – площа п'ятикутника. За адитивною властивістю площа п'ятикутника дорівнює сумі площ трикутників: $S = \frac{1}{2}ah_1 + ... + \frac{1}{2}ah_4 + \frac{1}{2}ah_5$. Тому $h_1 + ... + h_4 + h_5 = \frac{2S}{a}$.



Мал. 18

3. Виграє хлопчик, який починає гру. Для цього йому досить першим ходом замінити 13-й знак. Далі, відповідаючи на хід суперника, замінювати знаки, симетричні відносно цього знака, тим знакам, які щойно замінив суперник.
4. $2\sqrt{2001} > \sqrt{2000} + \sqrt{2002}$. (*Див. задачу 5 для 8-го класу 2000 – 2001 н. р.*). **5.** 7.
6. $-\frac{2}{9}$, 2. Нехай b і $4b$ – корені рівняння. Тоді за теоремою Вієта маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4b^2 = a^2, \\ 5b = 2a + 1, \end{cases}$$

розв'язками якої є $a = 2, b = 1$ і $a = -\frac{2}{9}, b = \frac{1}{9}$. **7.** Задачу будемо розв'язувати аналітичним способом. Для цього помістимо чотирикутник у декартову систему координат (мал. 18). Нехай його вершини мають координати: $A(a;\, 0), B(0;\, b), C(c;\, e), D(d;\, 0)$. Тоді середини M, K і P відрізків AB, CD і MK матимуть такі координати: $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right), K\left(\frac{c+d}{2}; \frac{e}{2}\right), P\left(\frac{a+c+d}{4}; \frac{b+e}{4}\right)$. Точка P

лежить на прямій AC, рівняння якої $\frac{y}{e}=\frac{x-a}{c-a}$. Тому координати точки P задовольняють це рівняння:

$$\frac{b+e}{4e}=\frac{\frac{a+c+d}{4}-a}{c-a}\Leftrightarrow bc+2ae=ab+ed.$$

Нехай точка Q – середина відрізка BD. Тоді вона має координати $\frac{d}{2},\ \frac{b}{2}$.
Підставимо їх в рівняння прямої AC:

$$\frac{b}{2e}=\frac{\frac{d}{2}-a}{c-a}\Leftrightarrow bc-ab=ed-2ae\Leftrightarrow bc+2ae=ab+ed\ .$$

Одержана рівність – правильна, тому точка Q лежить на прямій AC. Отже, діагональ AC ділить діагональ BD навпіл. **8.** Оскільки дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то $x^2+x+1>0$ для всіх $x\in\mathbf{R}$. Тому x – комплексне число. З рівності $x^2+x+1=0$ маємо таку рівність:

$$x+\frac{1}{x}=-1\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(-1)^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=-1.$$

Аналогічно можна отримати наступні рівності:

$$x^4+\frac{1}{x^4}=-1,\ x^8+\frac{1}{x^8}=-1,\ x^{16}+\frac{1}{x^{16}}=-1.$$

Далі виконаємо такі перетворення:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3(-1)=-1\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=2,$$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}-1=-2\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=-1,$$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2=x^6+\frac{1}{x^6}+2=4\Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}=2,$$

$$\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)^2=x^{10}+\frac{1}{x^{10}}+2=1\Rightarrow x^{10}+\frac{1}{x^{10}}=-1.$$

Насамкінець маємо:

$$\left(x^{16}+\frac{1}{x^{16}}\right)\left(x^{10}+\frac{1}{x^{10}}\right)=\left(x^{26}+\frac{1}{x^{26}}\right)+\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)=$$

$$=x^{26}+\frac{1}{x^{26}}+2=1\Rightarrow x^{26}+\frac{1}{x^{26}}=-1.$$

9. Припустимо, що для деяких раціональних x і y виконується рівність. Тоді

$$\left(x+\sqrt{3}y\right)^2=1+\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(x^2+3y^2\right)+2\sqrt{3}xy=1+\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}x^2+3y^2=1,\\2xy=1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)^2+2y^2=0,\\2xy=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=0,\\2xy=1.\end{cases}$$

Прийшли до суперечності. Отже, припущення хибне. **10.** Якщо a, b – катети, c – гіпотенуза, то пошук трикутників зводиться до розв'язування системи діофантових рівнянь:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ a+b+c=40, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=(c-b)(c+b), \\ c=40-a-b, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=(40-a-2b)(40-a) \Leftrightarrow (a-40)(b-40)=800.$$

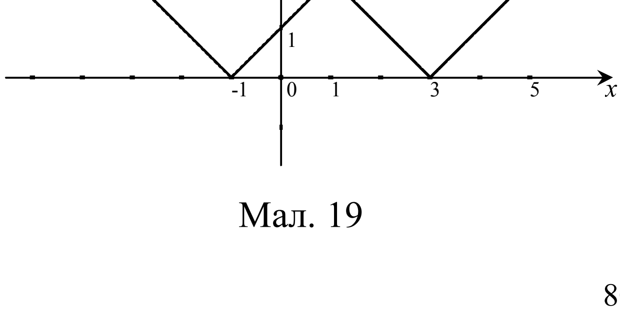
Оскільки $800=1\cdot 800=2\cdot 400=4\cdot 200=8\cdot 100=10\cdot 80=16\cdot 50=20\cdot 40=25\cdot 32$, то, враховуючи знаки множників (множники можуть бути від'ємними), розв'язування останнього рівняння зводиться до розв'язування сукупності 16 систем лінійних рівнянь. Однак, зважаючи на умову задачі (катети повинні бути менші 20 см), розв'язок $a=15, b=8$ тільки одної системи, а саме:

$$\begin{cases} a-40=-25, \\ b-40=-32 \end{cases}$$

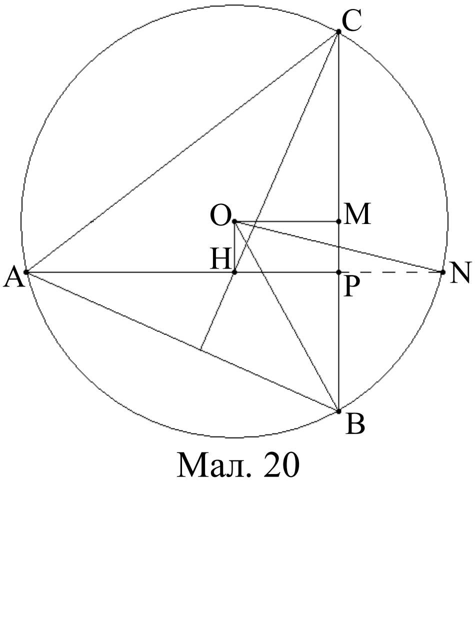
може відповідати умові задачі. Знаючи катети, знаходимо гіпотенузу трикутника: $c=17$. З рівності $8+15+17=40$ приходимо до висновку, що шуканий трикутник єдиний і його сторони 8 см, 15 см і 17 см. **11.** Графік функції міститься на мал. 19. **12.** Припустимо, що існують цілі числа x, y і p, для яких виконується рівність $x^2+y^2=4p+3$. Зрозуміло, що x і y повинні бути числами різної парності. Якщо $x=2n,\ y=2k+1$, то приходимо до рівності $2\left(n^2+k^2+k\right)=2p+1$, яка не може виконуватися на множині цілих чисел. Отже, припущення хибне.

13. $-\frac{1}{5}$. $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-3x}=x+1, \\ \sqrt{x^2-3x}=x-1. \end{array}\right.$

14. Нехай $PB=x, R$ – радіус описаного кола (мал. 20). За властивістю ортоцентра (ортоцентр – точка перетину висот трикутника) точка N, симетрична точці H відносно сторони BC, лежить на колі, описаному навколо трикутника. Тому $PN=5$, а $R^2=OH^2+HN^2=221$. Водночас з трикутника OMB маємо $R^2=OM^2+MB^2=25+(11+x)^2$. Далі знаходимо $x=3$, $MB=14$, а $CB=28$.



Мал. 19



Мал. 20

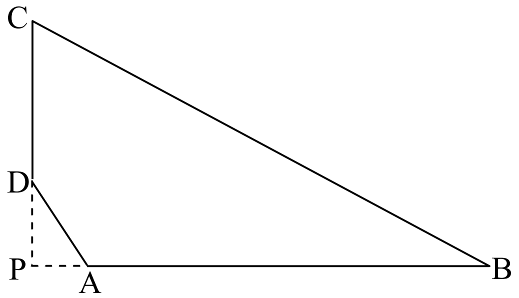
X КЛАС

1. *Див. задачу 5 для 10-го класу 2000 – 2001 н. р.* **2.** Зрозуміло, що рівняння може мати розв'язки тільки тоді, коли a – ціле невід'ємне число. Тому розглянемо два випадки. 1) $a = 2k, k = 0, 1, 2, \dots$. Якщо $x \geq 0$, то $[x] \geq 0$. За означенням модуля дійсного числа: $\left|[x]\right| = [x], \left[|x|\right] = [x]$. Тому з рівняння матимемо рівність $[x] = k$, яка виконується для всіх $x \in [k; k+1)$. Далі зупинимося на випадку, коли $x < 0$. Тоді $[x] < 0$ і рівняння запишеться так: $[-x] - [x] = 2k$. Якщо x – ціле від'ємне число, то $x = -k, k \in N$. В іншому разі рівняння не має розв'язків, бо тоді $[-x] - [x]$– непарне число. 2) $a = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$. На множині невід'ємних чисел рівняння набуває вигляду $2[x] = 2k - 1$, а отже, розв'язків не має. Якщо ж $x < 0$, то приходимо до рівняння $[-x] - [x] = 2k - 1$, яке не має цілих розв'язків. В іншому разі, враховуючи, що $[-x] = -[x] - 1$, приходимо до рівняння $-2[x] - 1 = 2k - 1$, розв'язки якого утворюють проміжок $(-k; 1-k)$. *Відповідь:* $x = -k$ *і* $x \in [k; k+1)$*, якщо* $a = 2k, k = 0, 1, 2, \dots$; $x \in (-k; 1-k)$*, якщо* $a = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$.

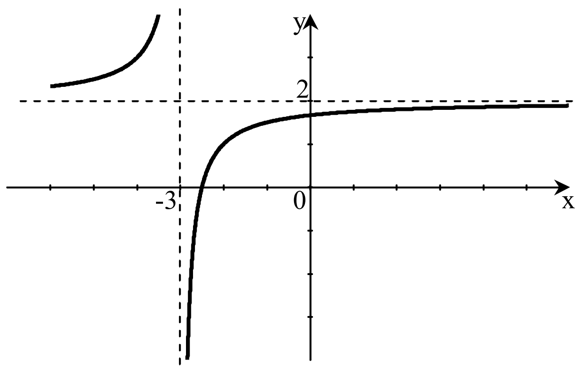
3. Нехай $PD = x, AP = y$ (мал. 21). Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x+4)^2 + (y+12)^2 = 289, \end{cases}$$

з якої знаходимо $x = 4, y = 3$. Далі знаходимо площу чотирикутника, яка дорівнює 54 см^2.



Мал. 21



Мал. 22

4. Функцію доцільно записати так: $y = 2 - \dfrac{1}{x+3}$. Для побудови її графіка потрібно параболу, що є графіком функції $y = \dfrac{1}{x}$, змістити ліворуч на 3 одиниці, відбити симетрично відносно осі абсцис і підняти вгору на дві одиниці – мал. 22. **5.** Нехай a – перший член, $q > 1$ – знаменник зростаючої геометричної прогресії. За властивістю арифметичної прогресії маємо таку рівність:

$$\frac{aq^3 + aq^6}{2} = aq^4 \Rightarrow q^3 + 1 = 2q \Leftrightarrow (q-1)(q^2 + q - 1) = 0 \Rightarrow q = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

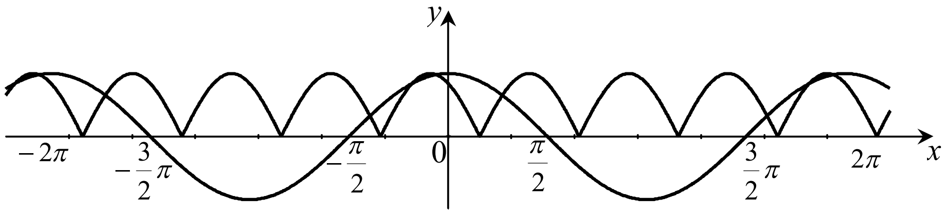
6. Оскільки ліва частина рівняння завжди невід'ємна, то повинна виконуватися нерівність $\cos x \ge 0$. Тому розв'язки рівняння, які містяться на відрізку $[-2\pi; 2\pi]$, треба шукати на множині $X = \left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Рівняння рівносильне сукупності двох мішаних систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(2x-1) \ge 0, \\ \sin(2x-1) = \cos x, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin(2x-1) < 0, \\ -\sin(2x-1) = \cos x, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(2x-1) \ge 0, \\ \sin(2x-1) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin(2x-1) < 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(2x-1) = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(2x-1) \ge 0, \\ 2\cos\dfrac{x-1+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\dfrac{3x-1-\frac{\pi}{2}}{2} = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin(2x-1) < 0, \\ 2\sin\dfrac{x-1+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\dfrac{3x-1-\frac{\pi}{2}}{2} = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для полегшення вибору розв'язків, які містяться на множині X, доцільно скористатися графічним способом розв'язування даного рівняння.



Мал. 23

З мал. 23 видно, що рівняння має вісім розв'язків, які знаходимо, розв'язуючи сукупність мішаних систем.

Відповідь: $\frac{1}{3} - \frac{11\pi}{6}; \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}; 1 - \frac{\pi}{2}; \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}; \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6}; \frac{1}{3} + \frac{3\pi}{2}; 1 + \frac{3\pi}{2}; \frac{1}{3} + \frac{11\pi}{6}$.

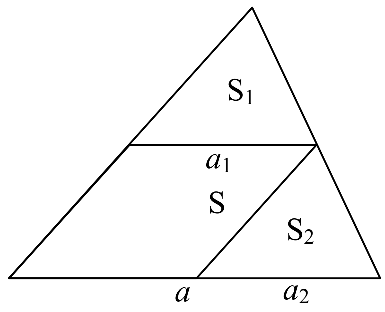
7. Оскільки $x = \frac{10-5y}{2}$, то нерівність зводиться до очевидної нерівності

$$-(x-y)^2 - \frac{5(y-1)^2 + 9}{2} < 0.$$

8. Нехай S – шукана площа, a, a_1, a_2 – основи трикутників (мал. 24). Тоді з пропорцій

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{a_1}{a}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{a_2}{a}$$

легко одержати рівність $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.



Мал. 24

9. $\frac{119}{480}$. Визначимо x, y і z так, щоб виконувалася рівність:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{x}{n}+\frac{y}{n+1}+\frac{z}{n+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{x(n^2+3n+2)+y(n^2+2n)+z(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=(x+y+z)n^2+(3x+2y+z)a+2x.$$

Вона виконуватиметься, якщо

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 3x+2y+z=0, \\ 2x=1. \end{cases}$$

Звідси маємо $x=z=\frac{1}{2}, y=-1$. Тому $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$.

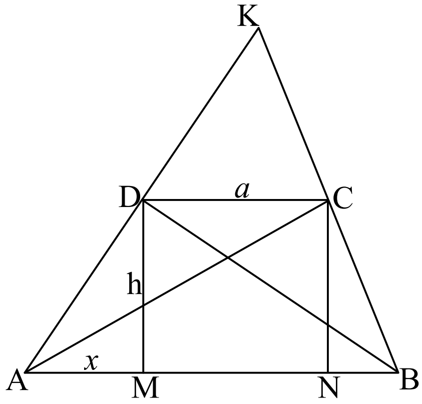
Використовуючи цю рівність, методом математичної індукції можна довести (пропонуємо це зробити самостійно), що

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Звідси при $n=14$ маємо $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{14\cdot15\cdot16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot15\cdot16}=\frac{119}{480}$.

10. Розглядаючи рівняння на проміжках $[0;2),[2;3),[3;+\infty)$, переконуємося, що воно не має доданих розв'язків. Оскільки функція, яка міститься в лівій частині рівняння, парна, то воно не має й від'ємних розв'язків. Нуль також не задовольняє рівняння. Тому рівняння не має розв'язків. **11.** *Див задачу 6 для 11-го класу 2000 – 2001 навчального року*. **12.** Нехай a – верхня основа, h – висота трапеції, x – відрізок AM (мал. 25). Зрозуміло, що відрізок DC – середня лінія трикутника AKB. Тому $S_\Delta=2ah$ – площа трикутника AKB, $S=\frac{3}{2}ah$ – площа трапеції $ABCD$ і $S_\Delta=\frac{4}{3}S$. Знайдемо площу трапеції. Використовуючи трикутники ADM і CBN, установимо зв'язок між a та h. Маємо:

$$\begin{cases} x+a=\sqrt{25-h^2}, \\ 2a-x=\sqrt{36-h^2}, \end{cases}\Rightarrow 3a=\sqrt{25-h^2}+\sqrt{36-h^2}.$$



Мал. 25

Отже, площа трапеції $S = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{25-h^2}+\sqrt{36-h^2}\right)$ є функцією змінної $h \in (0;5)$. Найбільше значення функції знайдемо за допомогою нерівності Коші-Буняковського:

$$S = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{25-h^2}+\sqrt{36-h^2}\right) = \frac{1}{2}\left(h\sqrt{25-h^2}+\sqrt{36-h^2}\cdot h\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{h^2+\left(\sqrt{36-h^2}\right)}\sqrt{\left(\sqrt{25-h^2}\right)+h^2} = 15.$$

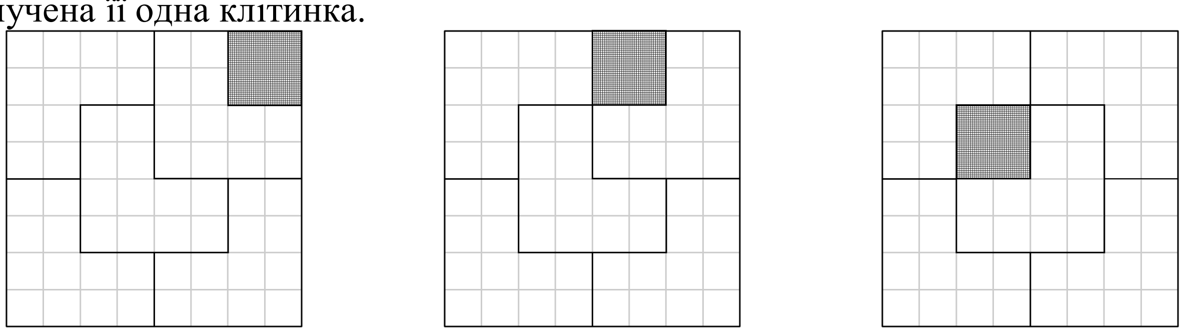
Оскільки нерівність Коші-Буняковського перетворюється в рівність, якщо

$$\frac{h}{\sqrt{36-h^2}} = \frac{\sqrt{25-h^2}}{h},$$

то, розв'язуючи це рівняння, отримаємо те значення висоти $h = \frac{30\sqrt{61}}{61}$, при якому трапеція, а отже, і трикутник матимуть найбільшу площу. Для знаходження периметра p трикутника AKB обчислимо довжину верхньої основи трапеції та її бокових ребер: $a = \frac{\sqrt{61}}{3}$, $x = \frac{14}{3\sqrt{61}}$, $AD = \frac{\sqrt{136}}{3}$, $BC = \frac{13}{3}$.

Нарешті знаходимо периметр трикутника: $p = \frac{2}{3}\left(\sqrt{61}+\sqrt{136}+13\right)$.

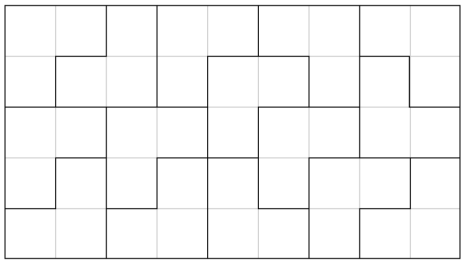
13. Поділимо шахівницю 8×8 на чотири квадрати 4×4. Три утворені квадрати покриємо фігурками так, як це зроблено на мал. 26 *а*), четвертий квадрат можна покрити так, як показано на мал. 26 *б*) або на мал. 26 *в*). Використовуючи одну фігурку й ці покриття, завжди можна покрити шахівницю 8×8, де б не була вилучена її одна клітинка.



а *б* *в*

Мал. 26

Шахівницю 9×9 також можна покрити вказаними фігурками. Її прямокутну частину розміром 4×9 легко покрити прямокутниками 2×3, складеними з двох фігурок. Покриття решти шахівниці показане на мал. 27.

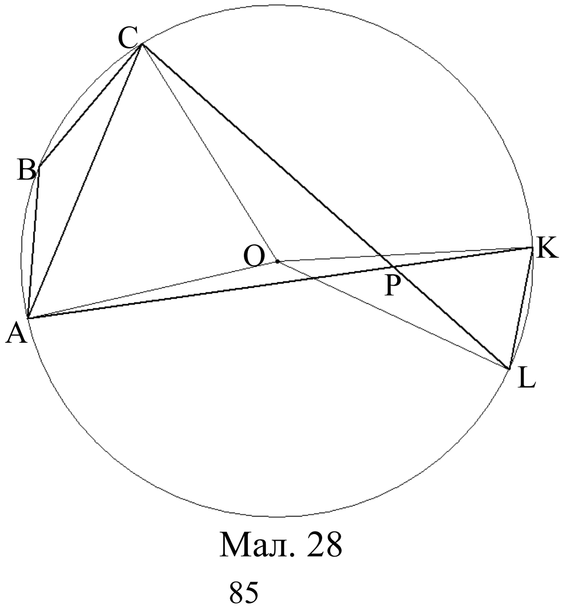


Мал. 27

14. Якщо $0\le x<1$, то $\{x\}=x$, а тому маємо рівняння $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. Його графіком є коло $O\left(\left(\frac{1}{2};0\right),\frac{1}{2}\right)$ без точки $(1;0)$. Графіком заданого рівняння є нескінченний „ланцюжок”, який отримаємо паралельним перенесенням побудованого кола вздовж осі абсцис на ціле число одиниць.

XI КЛАС

1. *Див. задачу 2 для 8-го класу*. **2.** Виграшна стратегія є в другого гравця. Нехай $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – числа, на які множить число 10 перший гравець, $b_1, b_2, b_3, \ldots$ числа, на які множить другий гравець. Якщо другий гравець вибере число b_1 так, щоб $12\le a_1b_1\le 21$, а це він може зробити прибудь-якому виборі числа a_1, то після другого ходу першого гравця буде справджуватися нерівність $24\le a_1b_1a_2\le 189$. Взявши $b_2=9$, другий гравець завершить гру своєю перемогою, бо $10\cdot a_1\cdot b_1\cdot a_2\cdot b_2\ge 2160$. **3.** *9.* Нехай D – довжина найбільшої діагоналі AK, d – довжина найменшої діагоналі AC, $AB=BC=\ldots=KL=\ldots=a$ (мал. 28). Тоді $D=AK=AP+PK=d+a$.



Мал. 28

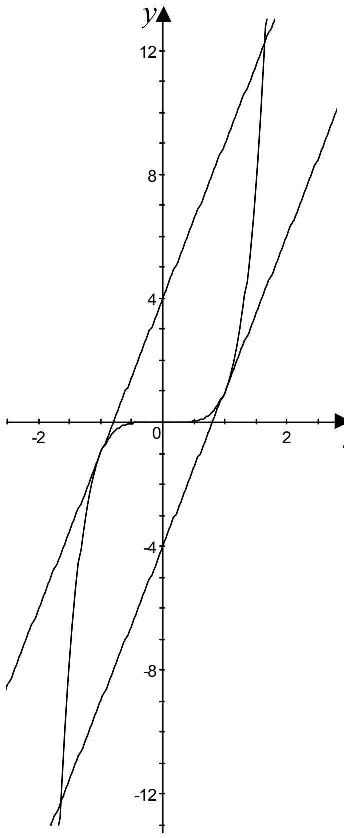
Доведемо, що трикутники PKL і ACP – рівносторонні. Оскільки вони рівнобедрені: $KL = KP$ і $AP = CP$, то маємо: $\angle KLP = \angle KPL = \angle APC = \angle ACL = \angle AKL = \angle 60^\circ$. Якщо O – центр описаного навколо многокутника кола, то $\angle AOL = \angle COK = 120^\circ$. Тому $\angle AOB + \angle BOC + \angle KOL = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = \angle KOL = 40^\circ$. **4.** Функція $y = \cos x - x$ спадає на множині дійсних чисел, бо її похідна $y' = -\sin x - 1$ недодатна на цій множині. Тому

$$y(2000) > y(2001) \Leftrightarrow \cos 2000 - 2000 > \cos 2001 - 2001 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 2001 < 1 + \cos 2000.$$

5. 6; 14. **6.** Рівняння має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають графіки функцій $y = x^5$ і $y = 5x + a$: один розв'язок, якщо $|a| > 4$, два – $|a| = 4$, три – $|a| < 4$ (мал. 29). **7.** $\dfrac{c^2m^2 - c^2}{4}$. Нехай a, b – катети, c – гіпотенуза, α, β – відповідні гострі кути трикутника. Тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ a + b = cm, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{cm + \sqrt{2c^2 - c^2m^2}}{2}, \\ b = \dfrac{cm - \sqrt{2c^2 - c^2m^2}}{2}. \end{cases}$$

Далі знаходимо площу трикутника.



Мал. 29

8. Доведення проведемо способом аналізу – від даної нерівності шляхом рівносильних перетворень прийдемо до нерівності Коші:

$$\sqrt{2(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{1}{8}\sqrt{(a+b+c)^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2p}\cdot\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{1}{8}\sqrt{2p}\cdot\sqrt{(2p)^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{1}{4}p^2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{1}{2}p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{p+(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4}.$$

9. Нехай a, b – сторони основи, c – висота паралелепіпеда. Тоді розв'язування задачі зводиться до розв'язування діофантового рівняння на множині натуральних чисел: $abc = 2(a+b) \Leftrightarrow abc^2 - 2ac - 2bc = 0 \Leftrightarrow (ac-2)(bc-2) = 4.$ Оскільки $4 = 1\cdot 4 = 2\cdot 2 = 4\cdot 1 = (-1)\cdot(-4) = (-2)\cdot(-2) = (-4)\cdot(-1)$, то це рівняння рівносильне сукупності шести систем рівнянь. Однак для розв'язання задачі треба розв'язати тільки дві з них:

$$\begin{cases} ac-2=1, \\ bc-2=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} ac-2=2, \\ bc-2=2. \end{cases}$$

Їхні розв'язки $(1;2;3), (3;6;1), (2;2;2), (1;1;4), (4;4;1)$ визначають п'ять шуканих паралелепіпедів. **10.** $(1;0), (1;2)$. Спочатку перетворимо кожний з доданків лівої частини рівняння й на підставі нерівності Коші отримаємо:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}} = 2,$$

$$\frac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 4\left(\sqrt[3]{(y-1)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}\right) \geq 8\cdot\sqrt{\sqrt[3]{(y-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}} = 8.$$

Зазначимо, що рівність в одержаних співвідношеннях буде виконуватися тільки за умови, що

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \qquad \sqrt[3]{(y-1)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}.$$

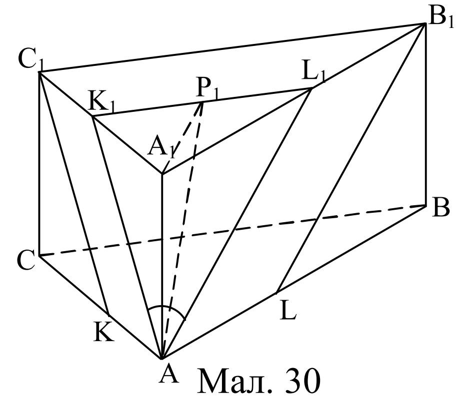
Звідси знаходимо два розв'язки рівняння. **11.** $(0;1)$. Оскільки нерівність рівносильна такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} \cos x \geq y^2 + \sqrt{y-x^2-1}, \\ y - x^2 - 1 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow y \geq x^2+1 \Rightarrow y \geq 1,$$

то $\cos x \geq 1$, а тому $x = 2k\pi, k$ – ціле число. Зрозуміло, що нерівність задовольняє тільки одна пара чисел: $x=0, y=1$. **12.** Для відшукання границі скористаємося рівністю, яку отримали, розв'язуючи задачу 9 для 10-го класу:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.$$

13. Нехай K і L – середини сторін AC і AB основи призми (мал. 30). Через вершину A_1 проведемо прямі AK_1 і AL_1, паралельні прямим C_1K і B_1L відповідно. Тоді кут між прямими C_1K і B_1L дорівнюватиме куту K_1AL_1, тобто



Мал. 30

$\angle K_1AL_1 = \alpha$. Далі з рівнобедреного трикутника K_1AL_1 знаходимо його медіану $AP_1 = \frac{a}{4} ctg \frac{\alpha}{2}$, з трикутника $K_1A_1L_1$ – $A_1P_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ і насамкінець з трикутника AA_1P_1 маємо $AA_1 = \frac{a}{4}\sqrt{ctg^2 \frac{\alpha}{2} - 3}$. **14.** Проробивши вказану операцію 13 разів над четвіркою чисел 1, 9, 8, 9, отримаємо послідовність

$$1, 9, 8, 9, 7, 3, 7, 6, 3, 9, 5, 3, 0, 7, 5, 5, 7,$$

чотири останні елементи якої утворюють стартову четвірку чисел задачі. Покажемо тепер, що відображення $a, b, c, d \to b, c, d, e$, де a, b, c, d, e – цифри десяткової системи числення, причому e – остання цифра суми $a+b+c+d$ або, що одне й те ж, остача від ділення цієї суми на 10, оборотне, тобто $b, c, d, e \to a, b, c, d$. Для цього з рівності $\frac{a+b+c+d}{10} = n + \frac{e}{10}$, де n – частка від ділення, яка може набувати лише значень 0, 1, 2, 3, знаходимо $a = 10n + e - d - c - b$. Оскільки a – цифра, то n у цій рівності добирається однозначно. Отже, існує однозначне відображення $b, c, d, e \to a, b, c, d$. Оскільки $1,9,8,9 \to 7,5,5,7$, то й $7,5,5,7 \to 1,9,8,9$. Зауважимо, що четвірку чисел 1, 9, 8, 9 можна одержати лише на 1547-му кроці. Звісно, що на олімпіаді за допомогою тільки ручки й паперу цього робити не варто, а ось дома використати комп'ютер для розв'язування задачі і цікаво, і корисно.

2002 – 2003 навчальний рік

VII КЛАС

1. *620, 62.* Якщо $x = \overline{ab0} = 100a + 10b, \quad y = \overline{ab} = 10a + b$, то

$$682 = x + y = (100a + 10b) + (10a + b) = 100a + 10(a+b) + b \Rightarrow b = 2, a = 6.$$

2. *80 км/год.* Нехай x – швидкість зустрічного поїзда. Оскільки $100\ ì = 0{,}1\ êì$, $3\ ñåê = \frac{1}{1200}\ ãîä$, то $0{,}1 : \frac{1}{1200} = 40 + x \Rightarrow x = 80.$ **3.** 20%. **4**. *Див. задачу 2 для 8-го класу 2001 – 2002 н.р.* **5.** Якщо x – вага голови, то

$$x + 0{,}2 = \frac{x - 0{,}2}{2} \Rightarrow x = 0{,}6.$$

Далі знаходимо вагу тулуба – 0,8 кг і вагу рибини – 1,6 кг. **6.** Нехай O – центральна клітинка дошки, d – одна з діагоналей дошки. Виграє гравець, котрий починає гру. Для цього йому потрібно спочатку поставити фішку на центральну клітинку. Далі, якщо суперник поставить фішку на клітинку діагоналі d, то й перший гравець повинен поставити свою фішку на ту клітинку діагоналі, яка їй симетрична відносно клітинки O. В іншому разі першому гравцю треба ставити фішку на клітинку, симетричну відносно діагоналі d. **7.** Якщо всі розміри коробки збільшити на x одиниць, то матимемо рівність: $(3+x)(4+x)(5+x) = 1320$. Розкладемо на множники число 1320: $1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Оскільки x – ціле число й серед множників числа 1320 є просте число 11, то одне з чисел $3+x, 4+x, 5+x$ повинно дорівнювати 11. Нескладно помітити, що $x = 7$. **8**. *Виграє гравець, який починає гру*. Для цього потрібно за першим ходом закреслити 12-у й 13-у клітинки, а відповідати на ходи суперника ходами, симетричними відносно спільної сторони 12-ї та 13-ї клітинок. **9.** $m^2 + n^2 + m - n = m(m+1) + n(n-1)$ ділиться на 2, бо сума добутків двох послідовних цілих чисел завжди ділиться на 2. **10**. Такими прямокутниками є прямокутники: $4 \times 3{,}5; 2 \times 0{,}5; 2 \times 0{,}5$. **11**. Якщо в країні n міст і з кожного міста виходить 8 доріг, то в країні повинно бути $4n$ доріг, бо кожна дорога з'єднує два міста. Оскільки $226 \neq 4n$ при жодному $n \in \mathbf{N}$, то такої кількості доріг у країні бути не може.

VIII КЛАС

1. $\frac{1449}{2691}$. Якщо дріб скоротили на число n, то $7n + 13n = 4140$. Звідси $n = 207$.

2. Візьмемо чотири цілі послідовні числа: $n, n+1, n+2, n+3$. Тоді

$$(n+1)(n+2) - n(n+3) = \left(n^2 + 3n + 2\right) - \left(n^2 + 3n\right) = 2.$$

3. Зважаючи на умову задачі, мал. 31 і уведені на ньому позначення, маємо систему рівнянь:

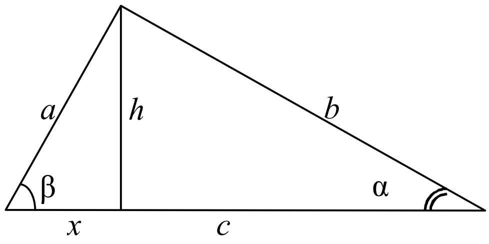
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 16h^2, \\ a^2 = h^2 + x^2, \\ b^2 = h^2 + (4h - x)^2, \end{cases} \Rightarrow x = \left(2 - \sqrt{3}\right)h.$$

Далі знаходимо тангенси гострих кутів трикутника: $tg\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $tg\beta = 2 - \sqrt{3}$. Оскільки $tg15° = tg(60° - 45°) = \frac{tg60° - tg45°}{1 + tg60° \cdot 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$, то $\alpha = 15°$, а $\beta = 75°$. **4.** $2\sqrt{2}a$. Нескладно помітити (мал. 32), що чотирикутник $KLMN$ – квадрат і $KM = LN = a$. Тому $KN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. **5.** Число p – непарне:

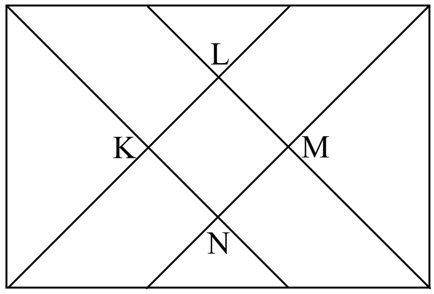
$p = 2n - 1$. Тому число $p^2 - 1 = 4n(n-1)$ ділиться на 8, бо добуток $n(n-1)$ – парне число. **6.** Виконаємо заміну $x + 4 = t$. Маємо:

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 16 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0 \Rightarrow t\pm = 1.$$

Далі знаходимо корені рівняння: -5 і -3. **7.** *Див. задачу 2 для 9-го класу 2001 – 2002 н.р.*

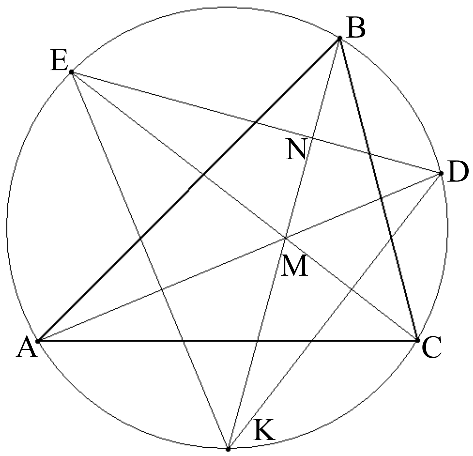


Мал. 31



Мал. 32

8. Доведемо, що $BK \perp ED$ (мал. 33). Для цього скористаємося рівністю



Мал. 33

вписаних кутів, які стягуються рівними дугами:

$$\angle ENK = 180° - (\angle NEC + \angle CEK + \angle EKN) = 180° - (\angle DAC + \angle CBK + \angle ECB) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}\left(\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB\right) = 180° - \frac{180°}{2} = 90°.$$

Аналогічно доводиться, що $CE \perp KD$, $AD \perp EK$. **9.** Нехай $\underbrace{11...1}_{n} = a$. Тоді

$$\sqrt{\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n}} = \sqrt{10^n a + a - 2a} = \sqrt{10^n a - a} = \sqrt{(10^n - 1)a} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{99...9}_{n}a} = \sqrt{9a^2} = 3a = \underbrace{33...3}_{n}.$$

10. Поділимо квадрат на 25 квадратів зі стороною 20 см. Оскільки $53 > 25 \cdot 2$, то за принципом Діріхле на мові «кроликів – кліток» в якомусь квадратику буде щонайменше три точки. **11**. Нерівність рівносильна очевидній нерівності

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

12. У співвідношенні між середнім арифметичним і середнім геометричним :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},\ x \geq 0,\ y \geq 0,$$

рівність досягається тільки за умови, що $x = y$. Тому $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2003}{2}\right)^2$, а $xy = \left(\frac{2003}{2}\right)^2$, якщо $x = y = \frac{2003}{2}$. **13**. *Ні, не можна*. Для розв'язання задачі досить навести один контрприклад. Таким контрприкладом є дельтоїд – його діагоналі перпендикулярні, але він не є ромбом.

IX КЛАС

1. Виділяючи повні квадрати двочленів, матимемо:

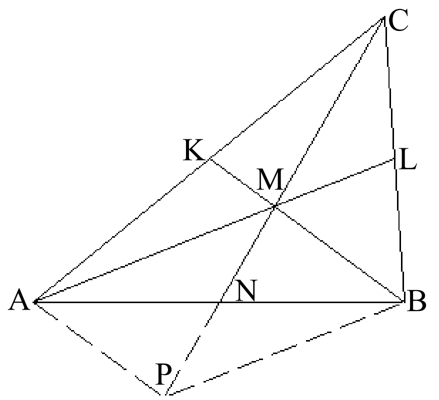
$$A = (a-4b)^2 + (b-2)^2 + (a-8)^2 + 1976 \ge 1976.$$

Зрозуміло, що найменше значення виразу A дорівнює 1976 і досягається воно, коли $a = 8, b = 2.$ **2.** Спочатку перетворимо ліву частину нерівності, а потім до кожного множника застосуємо нерівність Коші:

$$(a-x)(a-y)(a-z) = (y+z)(z+x)(x+y) \ge 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} \cdot 2\sqrt{xy} = 8xyz.$$

3. Нехай a, b, c – сторони трикутника ABC, m_a, m_b, m_c – його медіани. На продовжені медіани CN побудуємо точку P так, щоб $PM = MC$ (мал. 34). Чотирикутник $AMBP$ – паралелограм. Тому

$$AB^2 + MP^2 = 2\left(AP^2 + BP^2\right).$$



Мал. 34

Звідси знаходимо сторону c трикутника: $c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$. Аналогічно можна встановити, що: $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2}$, $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$.

4. Графіком функції є парабола $y = x^2 + x + 1$, з якої вилучена точка $(1; 3)$. **5.** *20.* Якщо n – кількість комплектів шахів вартістю 5 грн., m – вартістю 8 грн., то маємо лінійне діофантове рівняння $5n + 8m = 103$, яке потрібно розв'язати на множині цілих невід'ємних чисел. Спочатку виразимо n через m:

$$n = 20 - m + 3\frac{1-m}{5}.$$

Оскільки n – ціле число, то різниця $m-1$ повинна бути кратною 5: $1-m=5p$, де p – ціле число. Далі знаходимо цілі невід’ємні розв’язки рівняння: $m=1-5p, n=19+8p, p=-2,-1,0$. Звідси маємо суму $m+n=20+3p,$ яка буде найбільшою, коли $p=0.$ **6.** Графіком рівняння є два кола одиничного радіуса, центри яких містяться в точках $(-1;0)$ і $(1;0)$. **7.** Утворимо систему рівнянь і розв’яжемо її:

$$\begin{cases}(1-2a)x^2-6ax-1=0,\\ ax^2-x+1=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a(2x^2+6x)=x^2-1,\\ ax^2=x-1.\end{cases}$$

Числа 0 і –3 не можуть бути коренями рівнянь, тому з останньої системи маємо рівняння:

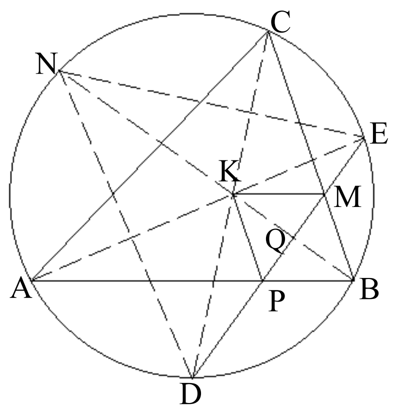
$$\frac{x^2-1}{2x^2+6x}=\frac{x-1}{x^2},$$

з якого знаходимо його корені: $-2,1,3$, а потім з рівняння $ax^2=x-1$ відповідні значення параметра a: $-\frac{3}{4},0,\frac{2}{9}.$

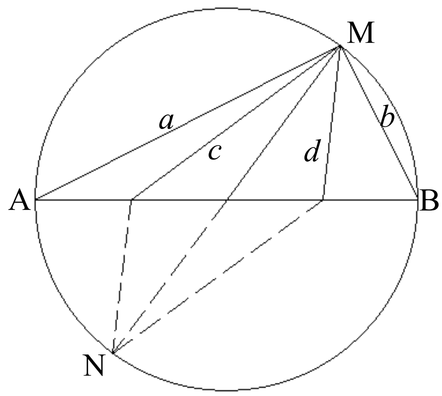
8. $$xy+x=a^2-b^2 \Leftrightarrow x(y+1)=(a-b)(a+b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=a-b,\\ y+1=a+b,\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1+x+y}{2}, b=\frac{1-x+y}{2}.$$

9. Нехай бісектриса кута B перетинає коло в точці N (мал. 35). Тоді висоти трикутника DNE і відповідні бісектриси трикутника ABC лежать на прямих AE, BN, CD, тобто точка K є ортоцентром трикутника DNE. За властивістю ортоцентра точки K і B – симетричні відносно сторони DE трикутника DNE, а отже, діагоналі чотирикутника $BPMK$ взаємно перпендикулярні й $KQ=QB.$ Відрізок KQ є одночасно бісектрисою і висотою, а отже, й медіаною трикутника PKM. Тому $PQ=QM$. Оскільки діагоналі чотирикутника $BPKM$ взаємно перпендикулярні й в точці перетину діляться навпіл, то $BPKM$ – ромб.



Мал. 35



Мал. 36

10. 0. Оскільки $3a-1\neq 0,\ x_1+x_2=-1,\ x_1x_2=\dfrac{a^2}{3a-1}$, то, використовуючи рівності

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2),\quad x_1^3+x_2^3=-1,$$

легко знайти шукані значення параметра a. **11**. 4006. Графіком рівняння $|x|+|y|=2003$ є квадрат з вершинами в точках $(\pm 2003;0),(0;\pm 2003)$. Найбільша відстань між двома точками цього квадрата дорівнює довжині його діагоналі – 4006. Графік рівняння $|2003-x|+|2003-y|=2003$ одержимо, змістивши цей квадрат на вектор $\overline{(2003;2003)}$. При такому перетворенні відстань між точками не змінюється. **12.** $7{,}5r^2$. Трикутник AMB прямокутний, тому $a^2+b^2=4r^2$ (мал. 36). Чотирикутник $AMBN$ – паралелограм, тому $c^2+d^2=\dfrac{r^2+4r^2}{2}$. Далі знаходимо шукану суму.

13. Оскільки $a+b>c$, то

$$a^3+b^3+3abc=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc>$$
$$>c(a^2-ab+b^2)+3abc=c(a+b)^2>c^3.$$

14. Рівняння не має цілих розв'язків, бо його ліва частина кратна числу 3 для будь-якого цілого x, а права не ділиться на 3 при жодному цілому y. У цьому нескладно переконатися, взявши $y=3n+r$, де $n\in\mathbf{Z}$, а $r\in\{-1,0,1\}$:

$$y^2-19y+98=3(3n^2+2nr-19n-6r+33)+(r^2-r-1).$$

Одержана сума не ділиться на 3 тому, що другий доданок не ділиться на 3.

X КЛАС

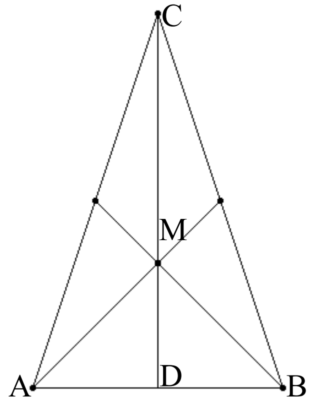
1. Для побудови графіка функцію, використовуючи означення модуля, доцільно записати так:

$$y=\begin{cases}x^2-2x, & \text{якщо } x<-1,\\ x^2+2, & \text{якщо } -1\le x\le 1,\\ x^2+2x, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

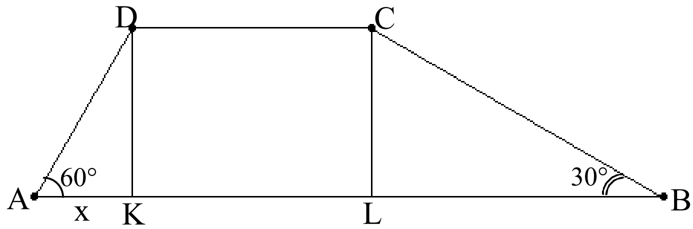
2. Якщо M – точка перетину медіан трикутника ABC (мал. 37), то BDM – прямокутний рівнобедрений трикутник: $DB=DM=1$ *м*. За властивістю медіан трикутника маємо $CD=3$ *м* і $CD\perp AB$. Тому площа трикутника дорівнює 3 *м*^{2}.

3.

$$\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^6>\left(\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)^6\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^3>\left(a^3+b^3\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a^4b^2+3a^2b^4>2a^3b^3\Leftrightarrow 3a^2+3b^2>2ab\Leftrightarrow (a-b)^2>-\frac{4ab}{3}.$$



Мал. 37



Мал. 38

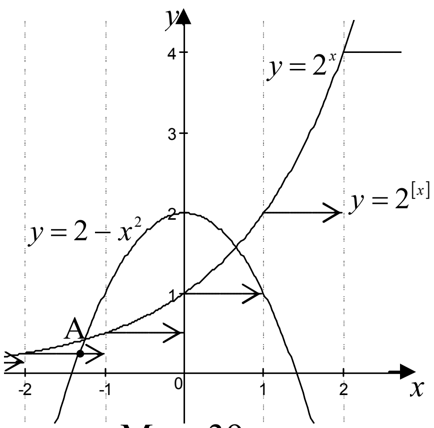
4. Нехай $DK = CL = h$ – висота трапеції, $AK = x, LB = 54 - x$ (мал. 38). Тоді

$$xtg60^\circ = h = (54 - x)tg30^\circ.$$

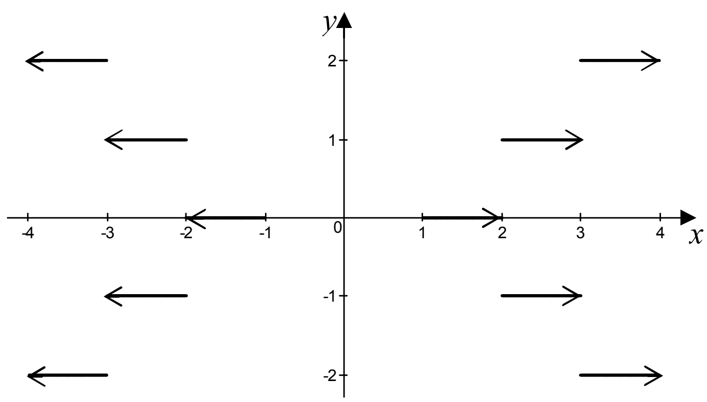
Далі знаходимо $x = \frac{27}{2}\,см, h = \frac{27\sqrt{3}}{2}\,см$ і $S = \frac{1377\sqrt{3}}{2}\,\tilde{n}\grave{i}^{\,2}$. **5.** Рівняння розв'яжемо графічно. Для цього побудуємо графіки функцій $y = 2 - x^2$ і $y = 2^{[x]}$ (мал. 39). Вони мають єдину спільну точку $A(x_1; y_1)$. Абсциса цієї точки є розв'язком рівняння. Тому $x_1^2 + 2^{[x_1]} = 2$. Оскільки $-2 < x_1 < -1$, то $[x_1] = -2$, а $x_1 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$. **6.** Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$(x-1)(x^2 + x - 1) = 0.$$

Звідси знаходимо корені рівняння: 1, $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **7.** За властивістю цілої частини $[|x| - 1] = [|x|] - 1$. Тому $|y| = [|x|] - 1$. Оскільки модулі протилежних чисел рівні: $|-x| = |x|, |-y| = |y|$, то графік рівняння симетричний відносно координатних осей. Тому побудуємо його спочатку в першому координатному куті. Для $x \ge 1, y \ge 0$ рівняння набуває вигляду $y = [x] - 1$. Продовжуючи графік функції $y = [x] - 1$ симетрично відносно координатних осей на всю координатну площину, матимемо графік рівняння (мал. 40).



Мал. 39



Мал. 40

8. Якщо $a, b\,(a<b)$ – катети, c – гіпотенуза трикутника, d – різниця прогресії, то $b=a+d, c=a+2d$ і $a^2+b^2=c^2$. Далі знаходимо: $a=3d$, $b=4d, c=5d$. Нарешті, використовуючи формули для обчислення площі трикутника $S=\frac{1}{2}ab$ і $S=\frac{a+b+c}{2}r$, встановлюємо, що $d=r$. **9.** Нехай a, b, c – сторони трикутника, x, y, z – відстані центра до сторін відповідно, R – радіус описаного кола. Тоді

$$S=x+y+z=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}+\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{R-\frac{a}{2}}\sqrt{R+\frac{a}{2}}+\sqrt{R-\frac{b}{2}}\sqrt{R+\frac{b}{2}}+\sqrt{R-\frac{c}{2}}\sqrt{R+\frac{c}{2}}.$$

Для відшукання найбільшого значення суми S скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{R-\frac{a}{2}}\sqrt{R+\frac{a}{2}}+\sqrt{R-\frac{b}{2}}\sqrt{R+\frac{b}{2}}+\sqrt{R-\frac{c}{2}}\sqrt{R+\frac{c}{2}}\le$$

$$\le\sqrt{R-\frac{a}{2}+R-\frac{b}{2}+R-\frac{c}{2}}\cdot\sqrt{R+\frac{a}{2}+R+\frac{b}{2}+R+\frac{c}{2}}=$$

$$\sqrt{3R-\frac{p}{2}}\cdot\sqrt{3R+\frac{p}{2}}=\sqrt{9R^2-\frac{p^2}{4}}.$$

У цьому співвідношенні рівність матиме місце за такої умови:

$$\frac{\sqrt{R-\frac{a}{2}}}{\sqrt{R+\frac{a}{2}}}=\frac{\sqrt{R-\frac{b}{2}}}{\sqrt{R+\frac{b}{2}}}=\frac{\sqrt{R-\frac{c}{2}}}{\sqrt{R+\frac{c}{2}}}.$$

Звідси знаходимо, що $a=b=c$, тобто сума відстаней від центра описаного кола до сторін трикутника є найбільшою в рівносторонньому трикутнику. Нескладно встановити, що вона дорівнює висоті цього трикутника. **10.** Якщо $x>0, y>0,$ то

$$\sin^2 x+\sin^2 y=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x=1,\\ \sin^2 y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k=0,1,2,\ldots\ ,\\ y=\frac{\pi}{2}+n\pi, n=0,1,2,\ldots\ .\end{cases}$$

Якщо $xy<0,$ то

$$\sin^2 x+\sin^2 y=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x=0,\\ \sin^2 y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi,\\ y=n\pi,\ \ k,n\in Z, kn<0.\end{cases}$$

Для від'ємних x і y дана рівність не виконується. **11.** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$. Треба спочатку поділити обидві частини рівняння на x^2, а потім, використовуючи заміни $x-\dfrac{1}{x}=t$ і $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$, звести рівняння до квадратного. **12.** Нехай a, b, c – сторони трикутника, m_a, m_b, m_c – відповідні медіани. Тоді

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\ m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}.$$

Тому

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{1}{4}\left(\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+\left(2c^2+2a^2-b^2\right)+\left(2a^2+2b^2-c^2\right)\right)=$$

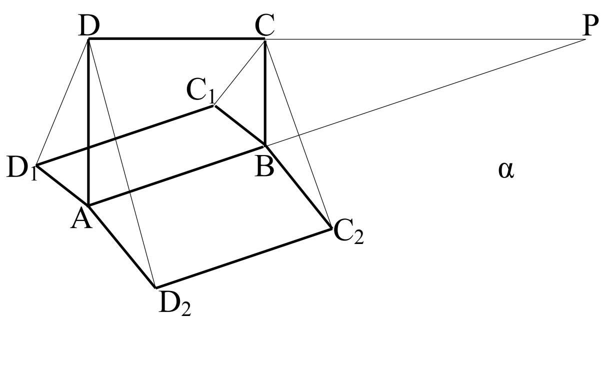
$$=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Далі скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

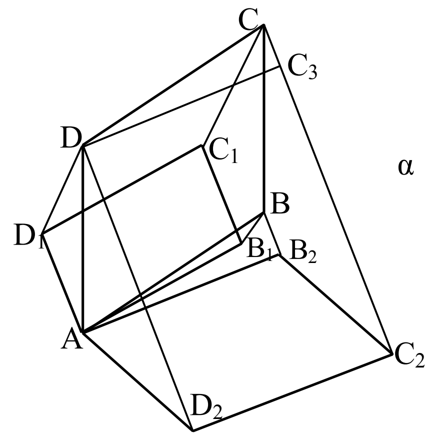
$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2.$$

Насамкінець маємо: $m_a^2+m_b^2+m_c^2\geq\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$. **13.** У кожній парі «дівчинка – хлопець» буде тільки один замріяний погляд (якщо вони знайомі, то дівчина замріяно дивиться на хлопця, якщо ні − то хлопець дивиться на дівчину), тому кількість поглядів $117=m\cdot n$, де m − кількість хлопців, а n − кількість дівчат. Оскільки $m+n\leq 40$, а $117=1\cdot 117=3\cdot 39=9\cdot 13$, то $n=9, m=13$ або навпаки.

14. Нехай α − площина, на яку ведеться проектування. Може бути два випадки: 1) хоч один з відрізків, наприклад AB, паралельний α; 2) жоден з відрізків не паралельний α. Розглянемо окремо кожний з випадків. 1) Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $A, B\in\alpha$ (мал. 41). Тоді ABC_1D_1 і ABC_2D_2 – паралелограми. Позначимо площину DCC_1D_1 через γ_1, а DCC_2D_2 – γ_2. Площини γ_2 і γ_2 перетинаються по прямій DC. Припустимо, що P – точка перетину DC і α. Тоді P повинна належати і C_1D_1, і C_2D_2, чого бути не може, бо $C_1D_1 \parallel C_2D_2$. Тому $DC\parallel\alpha \Rightarrow DC\parallel D_2C_2 \Rightarrow CD=AB$ і $CD\parallel AB \Rightarrow ABCD$ – паралелограм.



Мал. 41

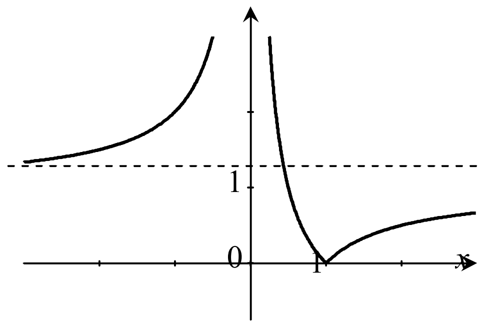


Мал. 42

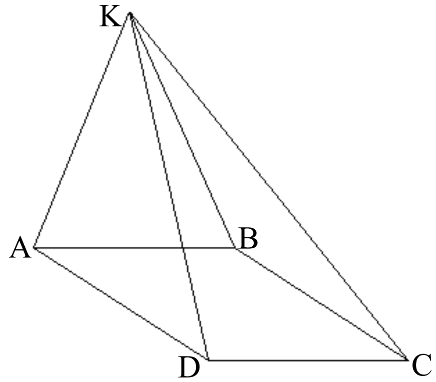
2) У цьому випадку будемо вважати, що $A\in\alpha$, $AB_1C_1D_1$ і $AB_2C_2D_2$ – паралелограми, які утворюються при паралельному проектуванні

чотирикутника $ABCD$ на α (мал. 42). Нехай γ_1 – площина CC_1D_1, β_1 – площина BB_1A, γ_2 – площина CC_2D_2, β_2 – площина BB_2A. Тоді $\gamma_1 || \beta_1$ і $\gamma_2 || \beta_2$, а $DC = \gamma_1 \cap \gamma_2$, $AB = \beta_1 \cap \beta_2$, при цьому $AB || DC$. (Якби AB і DC були не паралельні, то AB перетинала б або γ_1, або γ_2). Якщо точка C_3 така, що $C_2C_3 = DD_2$, то $\Delta DCC_3 = \Delta ABB_2$. Тому $DC = AB$, а отже, $ABCD$ – паралелограм.

XI КЛАС



Мал. 43



Мал. 44

1. *Див. мал. 43.* $(2;3), [3;7), [7;+\infty)$. **2.** $45°$. **3.** $\frac{43}{19}, \frac{\sqrt{105}-1}{2}$. *Вказівка.* Розв'яжіть рівняння на проміжках **4.** З рівностей $x_1 + x_2 = a$ й $x_1x_2 = a-1$ маємо $x_1^2 + x_2^2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1$. Тому найменше значення виразу $x_1^2 + x_2^2$ дорівнює 1 і досягається воно тоді, коли $a = 1$. **5.** З рівностей (мал. 44)

$$\angle ADK + \angle KDC + \angle DCK - \angle BCK = 180°,$$

$$\angle DKC + \angle KDC + \angle DCK = 180°, \ \angle AKD + \angle DKC - \angle BKC = 60°$$

нескладно отримати, що $\angle DKC = 30°$. **6.** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta < \sin\alpha + \sin\beta$, бо для гострих кутів $0 < \sin\gamma < 1, 0 < \cos\gamma < 1$. **7.** –1. Увівши позначення $f(x) = y, f(y) = z, f(z) = x,$ прийдемо до такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = y, \\ y^2 + 3y + 1 = z, \\ z^2 + 3z + 1 = x, \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = -1.$$

8. Нехай x, y, u, v – відстані вершини S піраміди до вершин A, B, C, D основи відповідно, $AB = DC = 16, AD = BC = 22, SO = 4$ (мал. 45). На прямій SO побудуємо точку S' так, щоб $SO = OS'$. Тоді за властивостями діагоналей паралелограма матимемо систему рівностей:

$$\begin{cases} S'S^2 + BD^2 = 2(y^2 + v^2), \\ S'S^2 + AC^2 = 2(x^2 + u^2), \end{cases} \Rightarrow 2S'S^2 + BD^2 + AC^2 = 2(y^2 + v^2 + x^2 + u^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + v^2 + x^2 + u^2 = 804.$$

Якщо d – різниця арифметичної прогресії, яку утворюють числа x, y, u, v, x – її перший член, а $y = x + d, u = x + 2d, v = x + 3d$, то приходимо до такого діофантового рівняння:

$$x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2 + (x+3d)^2 = 804 \Leftrightarrow 2x^2 + 6dx + 7d^2 = 402 \Rightarrow$$

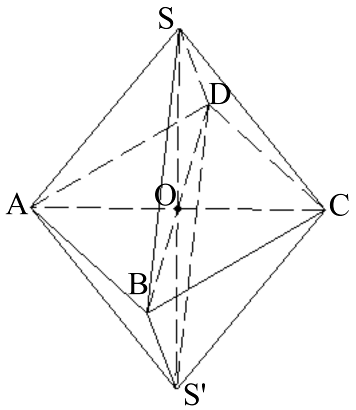
$$7d^2 < 402 \Rightarrow d < 8.$$

Оскільки d – парне число, то воно може дорівнювати тільки 2, 4 або 6. Перевіркою встановлюємо, що $d = 2$. Після цього знаходимо: $x = 11$, $y = 13, u = 15, v = 17$. **9.** Після нескладних рівносильних перетворень матимемо рівняння:

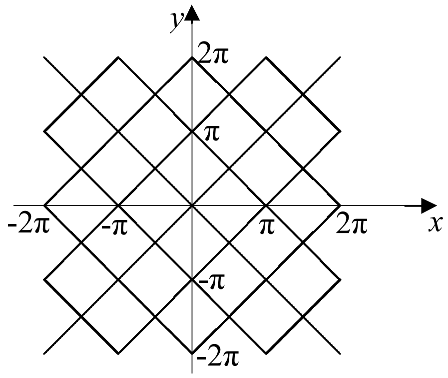
$$(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin^2 y = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 2y \Rightarrow y = \pm x + k\pi,\ k \in Z.$$

Множина точок, координати яких задовольняють дане рівняння, утворює прямокутну сітку, зображену на мал. 46.



Мал. 45



Мал. 46

10. Нехай $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + ... + \sin 2003x = A$. Помножимо рівність на $2\sin x \neq 0$ і виконаємо перетворення:

$$2A\sin x = 2(\sin x + \sin 3x + \sin 5x + ... + \sin 2003x)\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A\sin x = 1 - \cos 2004x.$$

Оскільки за умовою $1 - \cos 2004x = 2\sin x$, то $2A\sin x = 2\sin x$. Звідси маємо $A = 1$. Якщо $\sin x = 0$, то $A = 0$. *Відповідь*: 0, *якщо* $x = \pi n$; *1, якщо* $x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

11. З формули Герона маємо рівність $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Оскільки згідно з нерівністю Коші для трьох параметрів

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3,$$

то

$$\frac{S^2}{p} \leq \frac{p^3}{27} \Rightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow S \leq \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.$$

Далі застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$(a+b+c)^2 = (1\cdot a + 1\cdot b + 1\cdot c)^2 \leq \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Тому $S \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$. **12.** $a \in \left[-2; \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[1; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$. За допомогою похідної встановлюємо, що $x = \pm 1$ – точки екстремумів, а $f(-1) = a^2 - 3a - 2$ і $f(1) = a^2 + a - 2$ – екстремуми функції. Якщо $a > 0$, то $f(-1)$ – мінімум, який є і найменшим значенням функції f в області її визначення; $f(1)$ – максимум – найбільше значення f, тобто $\left[f(-1); f(1)\right]$ – множина значень функції f. Тому для розв'язання задачі треба розв'язати таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a^2 - 3a - 2 \le 0, \\ a^2 + a - 2 \ge 1. \end{cases}$$

Її розв'язками будуть $a \in \left[1; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$. У разі, коли $a < 0$, приходимо до наступної системи нерівностей:

$$\begin{cases} a < 0, \\ a^2 - 3a - 2 \ge 1, \\ a^2 + a - 2 \le 0. \end{cases}$$

з якої знаходимо $a \in \left[-2; \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right]$.

13. Уведенням змінних $u = \sqrt{x}, v = f(u), w = f(v)$ розв'язування рівняння зводиться до розв'язування циклічної системи рівнянь:

$$\begin{cases} u^2 + 2u - 2 = v, \\ v^2 + 2v - 2 = w, \\ w^2 + 2w - 2 = u. \end{cases}$$

Якщо $u = v = w$, то система вироджується в одне рівняння $u^2 + u - 2 = 0$. Звідси знаходимо єдиний невід'ємний корінь цього рівняння $u = 1$, а разом з ним й один розв'язок $(1; 1; 1)$ цієї системи. Якщо $u > 1$, то, враховуючи монотонність функції $v = u^2 + 2u - 2$, матимемо $v > 1$; аналогічно матимемо $w > 1$. Додавши всі рівняння системи, дістанемо рівність $u^2 + v^2 + w^2 + u + v + w = 6,$ яка не може виконуватися для $u > 1$, бо її ліва частина більша за 6. Це означає, що система не має розв'язків, компоненти яких більші за 1. А тому й рівняння не має розв'язків більших за 1. Отже, 1 – єдиний цілий розв'язок рівняння. **14.** *Див. задачу 9 для 9-го класу.*

2002 – 2003 навчальний рік

VII КЛАС

1. *620, 62.* Якщо $x = \overline{ab0} = 100a + 10b, \quad y = \overline{ab} = 10a + b$, то
$$682 = x + y = (100a + 10b) + (10a + b) = 100a + 10(a + b) + b \Rightarrow b = 2, a = 6.$$
2. *80 км/год.* Нехай x – швидкість зустрічного поїзда. Оскільки 100 $ì = 0{,}1$ $êì$, 3 $ñåê = \dfrac{1}{1200}$ $ãî\,ä$, то $0{,}1 : \dfrac{1}{1200} = 40 + x \Rightarrow x = 80.$ **3.** 20%. **4**. *Див. задачу 2 для 8-го класу 2001 – 2002 н.р*. **5.** Якщо x – вага голови, то
$$x + 0{,}2 = \frac{x - 0{,}2}{2} \Rightarrow x = 0{,}6\textbf{.}$$
Далі знаходимо вагу тулуба – 0,8 кг і вагу рибини – 1,6 кг. **6.** Нехай O – центральна клітинка дошки, d – одна з діагоналей дошки. Виграє гравець, котрий починає гру. Для цього йому потрібно спочатку поставити фішку на центральну клітинку. Далі, якщо суперник поставить фішку на клітинку діагоналі d, то й перший гравець повинен поставити свою фішку на ту клітинку діагоналі, яка їй симетрична відносно клітинки O. В іншому разі першому гравцю треба ставити фішку на клітинку, симетричну відносно діагоналі d. **7.** Якщо всі розміри коробки збільшити на x одиниць, то матимемо рівність: $(3 + x)(4 + x)(5 + x) = 1320.$ Розкладемо на множники число 1320: $1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Оскільки x – ціле число й серед множників числа 1320 є просте число 11, то одне з чисел $3 + x, 4 + x, 5 + x$ повинно дорівнювати 11. Нескладно помітити, що $x = 7$. **8**. *Виграє гравець, який починає гру*. Для цього потрібно за першим ходом закреслити 12-у й 13-у клітинки, а відповідати на ходи суперника ходами, симетричними відносно спільної сторони 12-ї та 13-ї клітинок. **9.** $m^2 + n^2 + m - n = m(m + 1) + n(n - 1)$ ділиться на 2, бо сума добутків двох послідовних цілих чисел завжди ділиться на 2. **10**. Такими прямокутниками є прямокутники: $4 \times 3{,}5; 2 \times 0{,}5; 2 \times 0{,}5.$ **11**. Якщо в країні n міст і з кожного міста виходить 8 доріг, то в країні повинно бути $4n$ доріг, бо кожна дорога з'єднує два міста. Оскільки $226 \neq 4n$ при жодному $n \in \mathbf{N}$, то такої кількості доріг у країні бути не може.

VIII КЛАС

1. $\dfrac{1449}{2691}$. Якщо дріб скоротили на число n , то $7n + 13n = 4140.$ Звідси $n = 207$.

2. Візьмемо чотири цілі послідовні числа: $n, n + 1, n + 2, n + 3$. Тоді
$$(n + 1)(n + 2) - n(n + 3) = (n^2 + 3n + 2) - (n^2 + 3n) = 2.$$
3. Зважаючи на умову задачі, мал. 31 і уведені на ньому позначення, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2+b^2=16h^2, \\ a^2=h^2+x^2, \\ b^2=h^2+(4h-x)^2, \end{cases} \Rightarrow x=\left(2-\sqrt{3}\right)h.$$

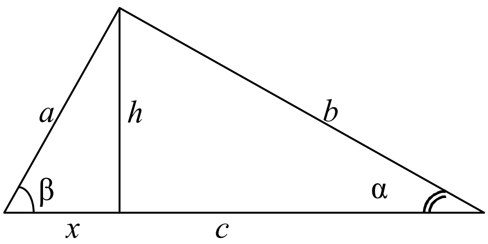
Далі знаходимо тангенси гострих кутів трикутника:

$$tg\alpha = 2+\sqrt{3}, \quad tg\beta = 2-\sqrt{3}.$$

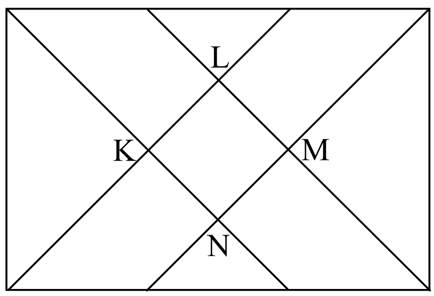
Оскільки $tg15° = tg(60°-45°) = \dfrac{tg60° - tg45°}{1+tg60°\cdot 45°} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$, то $\alpha = 15°$, а $\beta = 75°$. **4.** $2\sqrt{2}a.$ Нескладно помітити (мал. 32), що чотирикутник $KLMN$ – квадрат і $KM = LN = a$. Тому $KN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a.$ **5.** Число p – непарне: $p = 2n-1.$ Тому число $p^2-1 = 4n(n-1)$ ділиться на 8, бо добуток $n(n-1)$ – парне число. **6.** Виконаємо заміну $x+4=t.$ Маємо:

$$(t+1)^4+(t-1)^4=16 \Leftrightarrow t^4+6t^2-7=0 \Rightarrow t\pm=1.$$

Далі знаходимо корені рівняння: -5 і -3. **7.** *Див. задачу 2 для 9-го класу 2001 – 2002 н.р.*

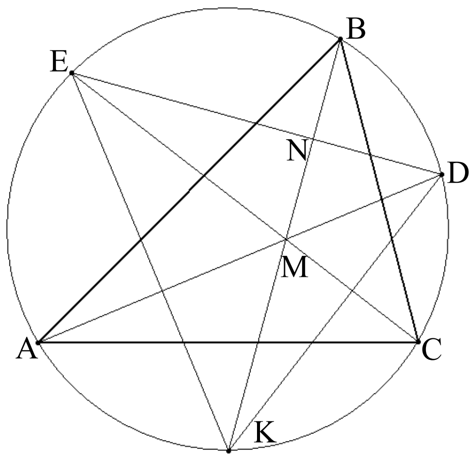


Мал. 31



Мал. 32

8. Доведемо, що $BK \perp ED$ (мал. 33). Для цього скористаємося рівністю



Мал. 33

вписаних кутів, які стягуються рівними дугами.

$$\angle ENK = 180° - (\angle NEC + \angle CEK + \angle EKN) =$$
$$= 180° - (\angle DAC + \angle CBK + \angle ECB) =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}\left(\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB\right) = 180° - \frac{180°}{2} = 90°.$$

Аналогічно доводиться, що $CE \perp KD$, $AD \perp EK$. **9.** Нехай $\underbrace{11...1}_{n} = a$. Тоді

$$\sqrt{\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n}} = \sqrt{10^n a + a - 2a} = \sqrt{10^n a - a} = \sqrt{(10^n - 1)a} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{99...9}_{n}a} = \sqrt{9a^2} = 3a = \underbrace{33...3}_{n}.$$

10. Поділимо квадрат на 25 квадратів зі стороною 20 см. Оскільки $53 > 25 \cdot 2$, то за принципом Діріхле на мові «кроликів – кліток» в якомусь квадратику буде щонайменше три точки. **11**. Нерівність рівносильна очевидній нерівності

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

12. У співвідношенні між середнім арифметичним і середнім геометричним :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},\ x \geq 0,\ y \geq 0,$$

рівність досягається тільки за умови, що $x = y$. Тому $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2003}{2}\right)^2$, а $xy = \left(\frac{2003}{2}\right)^2$, якщо $x = y = \frac{2003}{2}$. **13**. *Ні, не можна*. Для розв'язання задачі досить навести один контрприклад. Таким контрприкладом є дельтоїд – його діагоналі перпендикулярні, але він не є ромбом.

IX КЛАС

1. Виділяючи повні квадрати двочленів, матимемо:

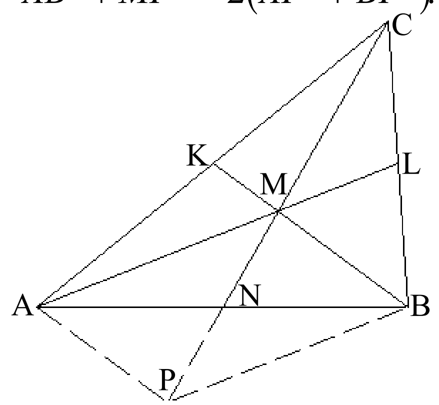
$$A = (a-4b)^2 + (b-2)^2 + (a-8)^2 + 1976 \geq 1976.$$

Зрозуміло, що найменше значення виразу A дорівнює 1976 і досягається воно, коли $a = 8, b = 2$. **2.** Спочатку перетворимо ліву частину нерівності, а потім до кожного множника застосуємо нерівність Коші:

$$(a-x)(a-y)(a-z) = (y+z)(z+x)(x+y) \geq 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} \cdot 2\sqrt{xy} = 8xyz.$$

3. Нехай a, b, c – сторони трикутника ABC, m_a, m_b, m_c – його медіани. На продовженні медіани CN побудуємо точку P так, щоб $PM = MC$ (мал. 34). Чотирикутник $AMBP$ – паралелограм. Тому

$$AB^2 + MP^2 = 2\left(AP^2 + BP^2\right).$$



Мал. 34

Звідси знаходимо сторону c трикутника: $c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}$. Аналогічно можна встановити, що $b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_c^2+2m_a^2-m_b^2}$, $a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}$.

4. Графіком функції є парабола $y=x^2+x+1$, з якої вилучена точка $(1;3)$. **5.** *20.* Якщо n – кількість комплектів шахів вартістю 5 грн., m – вартістю 8 грн., то маємо лінійне діофантове рівняння $5n+8m=103$, яке потрібно розв'язати на множині цілих невід'ємних чисел. Спочатку виразимо n через m:

$$n=20-m+3\frac{1-m}{5}.$$

Оскільки n – ціле число, то різниця $m-1$ повинна бути кратною 5: $1-m=5p$, де p – ціле число. Далі знаходимо цілі невід'ємні розв'язки рівняння: $m=1-5p, n=19+8p, p=-2,-1,0$. Звідси маємо суму $m+n=20+3p,$ яка буде найбільшою, коли $p=0$. **6.** Графіком рівняння є два кола одиничного радіуса, центри яких містяться в точках $(-1;0)$ і $(1;0)$. **7.** Утворимо систему рівнянь і розв'яжемо її:

$$\begin{cases}(1-2a)x^2-6ax-1=0,\\ ax^2-x+1=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(2x^2+6x)=x^2-1,\\ ax^2=x-1.\end{cases}$$

Числа 0 і –3 не можуть бути коренями рівнянь, тому з останньої системи маємо таке рівняння:

$$\frac{x^2-1}{2x^2+6x}=\frac{x-1}{x^2},$$

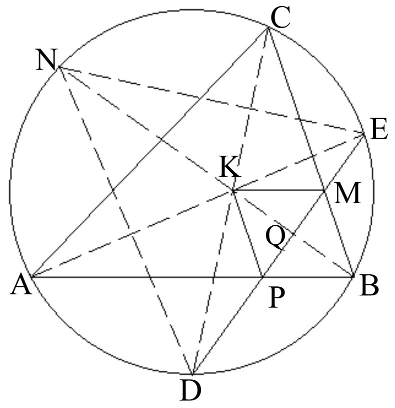
з якого знаходимо його корені: $-2,1,3$, а потім з рівняння $ax^2=x-1$ відповідні значення параметра a: $-\frac{3}{4},0,\frac{2}{9}.$

8.

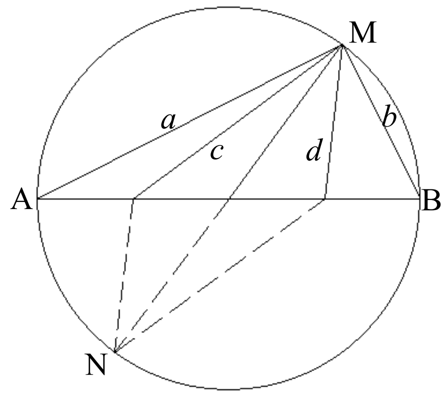
$$xy+x=a^2-b^2\Leftrightarrow x(y+1)=(a-b)(a+b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=a-b,\\ y+1=a+b,\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1+x+y}{2}, b=\frac{1-x+y}{2}.$$

9. Нехай бісектриса кута B перетинає коло в точці N (мал. 35). Тоді висоти трикутника DNE і відповідні бісектриси трикутника ABC лежать на прямих AE, BN, CD, тобто точка K є ортоцентром трикутника DNE. За властивістю ортоцентра точки K і B – симетричні відносно сторони DE трикутника DNE, а отже, діагоналі чотирикутника $BPMK$ взаємно перпендикулярні й $KQ=QB$. Відрізок KQ є одночасно бісектрисою і висотою, а отже, й медіаною трикутника PKM. Тому $PQ=QM$. Оскільки діагоналі чотирикутника $BPKM$ взаємно перпендикулярні й в точці перетину діляться навпіл, то $BPKM$ – ромб.



Мал. 35



Мал. 36

10. 0. Оскільки $3a-1\neq 0, x_1+x_2=-1, x_1x_2=\dfrac{a^2}{3a-1}$, то, використовуючи рівності

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2),\quad x_1^3+x_2^3=-1,$$

легко знайти шукані значення параметра a. **11**. 4006. Графіком рівняння $|x|+|y|=2003$ є квадрат з вершинами в точках $(\pm 2003;0),(0;\pm 2003)$. Найбільша відстань між двома точками цього квадрата дорівнює довжині його діагоналі – 4006. Графік рівняння $|2003-x|+|2003-y|=2003$ одержимо, змістивши цей квадрат на вектор $\overline{(2003;2003)}$. При такому перетворенні відстань між точками не змінюється. **12.** $7{,}5r^2$. Трикутник AMB прямокутний, тому $a^2+b^2=4r^2$ (мал. 36). Чотирикутник $AMBN$ – паралелограм, тому $c^2+d^2=\dfrac{r^2+4r^2}{2}$. Далі знаходимо шукану суму. **13.** Оскільки $a+b>c$, то

$$a^3+b^3+3abc=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc>$$
$$>c(a^2-ab+b^2)+3abc=c(a+b)^2>c^3.$$

14. Рівняння не має цілих розв'язків, бо його ліва частина кратна числу 3 для будь-якого цілого x, а права не ділиться на 3 при жодному цілому y. У цьому нескладно переконатися, взявши $y=3n+r$, де $n\in\mathbf{Z}$, а $r\in\{-1,0,1\}$:

$$y^2-19y+98=3(3n^2+2nr-19n-6r+33)+(r^2-r-1).$$

Одержана сума не ділиться на 3 тому, що другий доданок не ділиться на 3.

X КЛАС

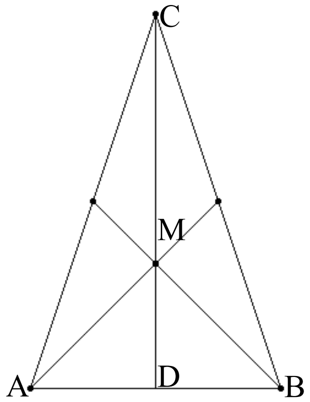
1. Для побудови графіка функцію, використовуючи означення модуля, доцільно записати так:

$$y=\begin{cases}x^2-2x, & \textit{якщо}\ \ x<-1,\\ x^2+2, & \textit{якщо}\ \ -1\le x\le 1,\\ x^2+2x, & \textit{якщо}\ \ x>1.\end{cases}$$

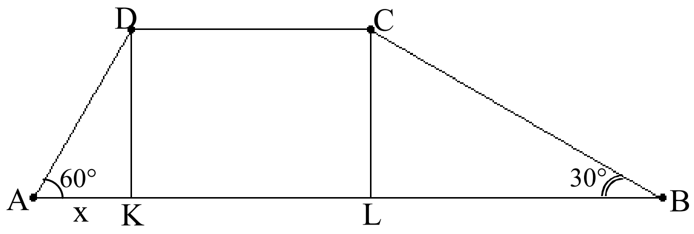
2. Якщо M – точка перетину медіан трикутника ABC (мал. 37), то BDM – прямокутний рівнобедрений трикутник: $DB = DM = 1\ м$. За властивістю медіан трикутника маємо $CD = 3\ м$ і $CD \perp AB$. Тому площа трикутника дорівнює $3\ м^2$.

3. $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^6 > \left(\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)^6 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^3 > \left(a^3+b^3\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3a^4b^2 + 3a^2b^4 > 2a^3b^3 \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 > 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 > -\frac{4ab}{3}.$$



Мал. 37



Мал. 38

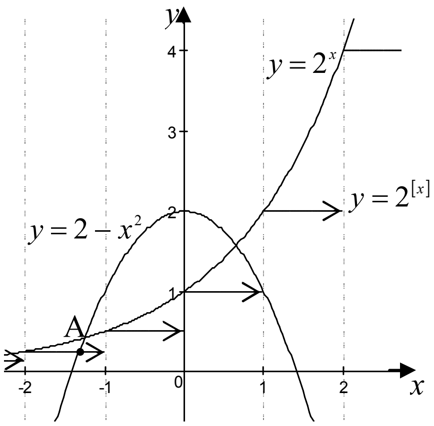
4. Нехай $DK = CL = h$ – висота трапеції, $AK = x, LB = 54 - x$ (мал. 38). Тоді

$$xtg60° = h = (54 - x)tg30°.$$

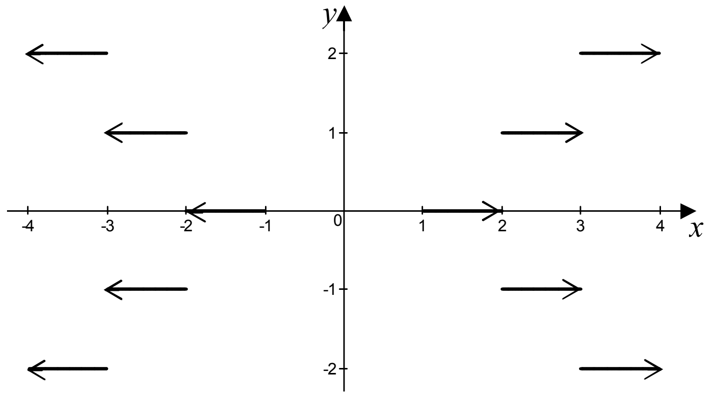
Далі знаходимо $x = \frac{27}{2}\ см, h = \frac{27\sqrt{3}}{2}\ см$ і $S = \frac{1377\sqrt{3}}{2}$ ñì ^{2}. **5.** Рівняння розв'яжемо графічно. Для цього побудуємо графіки функцій $y = 2 - x^2$ і $y = 2^{[x]}$ (мал. 39). Вони мають єдину спільну точку $A(x_1; y_1)$. Абсциса цієї точки є розв'язком рівняння. Тому $x_1^2 + 2^{[x_1]} = 2$. Оскільки $-2 < x_1 < -1$, то $[x_1] = -2$, а $x_1 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$. **6.** Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$(x-1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0.$$

Звідси знаходимо корені рівняння: 1, $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **7.** За властивістю цілої частини $[|x| - 1] = [|x|] - 1$. Тому $|y| = [|x|] - 1$. Оскільки модулі протилежних чисел рівні: $|-x| = |x|, |-y| = |y|$, то графік рівняння симетричний відносно координатних осей. Тому побудуємо його спочатку в першому координатному куті. Для $x \geq 1, y \geq 0$ рівняння набуває вигляду $y = [x] - 1$. Продовжуючи графік функції $y = [x] - 1$ симетрично відносно координатних осей на всю координатну площину, матимемо графік рівняння (мал. 40).



Мал. 39



Мал. 40

8. Якщо $a, b\ (a<b)$ – катети, c – гіпотенуза трикутника, d – різниця прогресії, то $b=a+d, c=a+2d$ і $a^2+b^2=c^2$. Далі знаходимо: $a=3d$, $b=4d, c=5d$. Нарешті, використовуючи формули для обчислення площі трикутника $S=\frac{1}{2}ab$ і $S=\frac{a+b+c}{2}r$, встановлюємо, що $d=r$. **9.** Нехай a, b, c – сторони трикутника, x, y, z – відстані центра до сторін відповідно, R – радіус описаного кола. Тоді

$$S=x+y+z=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}+\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{R-\frac{a}{2}}\sqrt{R+\frac{a}{2}}+\sqrt{R-\frac{b}{2}}\sqrt{R+\frac{b}{2}}+\sqrt{R-\frac{c}{2}}\sqrt{R+\frac{c}{2}}.$$

Для відшукання найбільшого значення суми S скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{R-\frac{a}{2}}\sqrt{R+\frac{a}{2}}+\sqrt{R-\frac{b}{2}}\sqrt{R+\frac{b}{2}}+\sqrt{R-\frac{c}{2}}\sqrt{R+\frac{c}{2}}\le$$

$$\le\sqrt{R-\frac{a}{2}+R-\frac{b}{2}+R-\frac{c}{2}}\cdot\sqrt{R+\frac{a}{2}+R+\frac{b}{2}+R+\frac{c}{2}}=$$

$$\sqrt{3R-\frac{p}{2}}\cdot\sqrt{3R+\frac{p}{2}}=\sqrt{9R^2-\frac{p^2}{4}}\cdot$$

У цьому співвідношенні рівність матиме місце за такої умови:

$$\frac{\sqrt{R-\frac{a}{2}}}{\sqrt{R+\frac{a}{2}}}=\frac{\sqrt{R-\frac{b}{2}}}{\sqrt{R+\frac{b}{2}}}=\frac{\sqrt{R-\frac{c}{2}}}{\sqrt{R+\frac{c}{2}}}.$$

Звідси знаходимо, що $a = b = c$, тобто сума відстаней від центра описаного кола до сторін трикутника є найбільшою в рівносторонньому трикутнику. Нескладно встановити, що вона дорівнює висоті цього трикутника. **10.** Якщо $x > 0,\ y > 0,$ то

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \sin^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, 1, 2, \dots\ , \\ y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, 1, 2, \dots\ . \end{cases}$$

Якщо $xy < 0,$ то

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ \sin^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi, \\ y = n\pi,\ \ k, n \in Z,\ kn < 0\ . \end{cases}$$

Для від'ємних x і y дана рівність не виконується. **11.** $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. Треба спочатку поділити обидві частини рівняння на x^2, а потім, використовуючи заміни $x - \dfrac{1}{x} = t$ і $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + 2$, звести рівняння до квадратного. **12.** Нехай a, b, c – сторони трикутника, m_a, m_b, m_c – відповідні медіани. Тоді

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}\ .$$

Тому

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4}\left(\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) + \left(2c^2 + 2a^2 - b^2\right) + \left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)\right) =$$

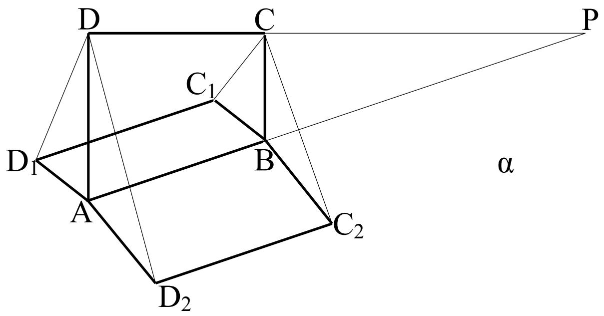
$$= \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Далі скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

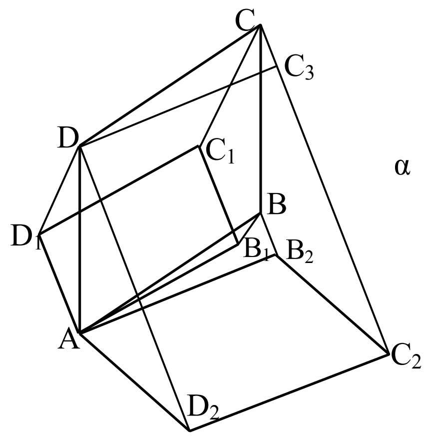
$$3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2\ .$$

Насамкінець маємо: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \ge \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$. **13.** У кожній парі «дівчинка – хлопець» буде тільки один замріяний погляд (якщо вони знайомі, то дівчина замріяно дивиться на хлопця, якщо ні − то хлопець дивиться на дівчину), тому кількість поглядів $117 = m \cdot n$, де m − кількість хлопців, а n − кількість дівчат. Оскільки $m + n \le 40$, а $117 = 1 \cdot 117 = 3 \cdot 39 = 9 \cdot 13$, то $n = 9, m = 13$ або навпаки.

14. Нехай α − площина, на яку ведеться проектування. Може бути два випадки: 1) хоч один з відрізків, наприклад AB, паралельний α; 2) жоден з відрізків не паралельний α. Розглянемо окремо кожний з випадків. 1) Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $A, B \in \alpha$ (мал. 41). Тоді ABC_1D_1 і ABC_2D_2 – паралелограми. Позначимо площину DCC_1D_1 через γ_1, а DCC_2D_2 – γ_2. Площини γ_2 і γ_2 перетинаються по прямій DC. Припустимо, що P – точка перетину DC і α. Тоді P повинна належати і C_1D_1, і C_2D_2, чого бути не може, бо $C_1D_1 \parallel C_2D_2$. Тому $DC \parallel \alpha \Rightarrow DC \parallel D_2C_2 \Rightarrow CD = AB$ і $CD \parallel AB \Rightarrow ABCD$ – паралелограм.



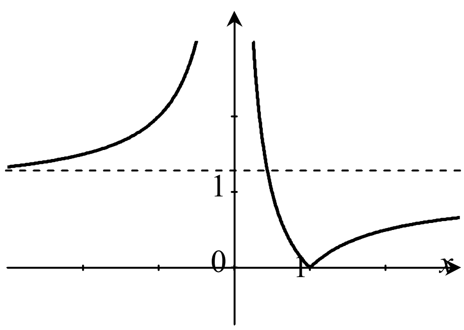
Мал. 41



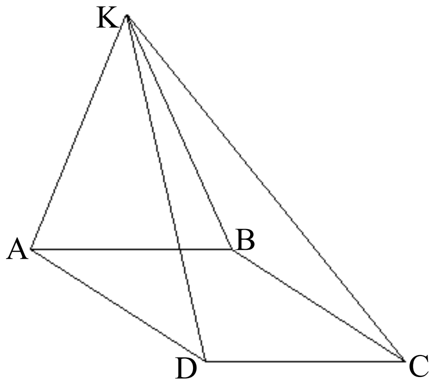
Мал. 42

2) У цьому випадку будемо вважати, що $A \in \alpha$, $AB_1C_1D_1$ і $AB_2C_2D_2$ – паралелограми, які утворюються при паралельному проектуванні чотирикутника $ABCD$ на α (мал. 42). Нехай γ_1 – площина CC_1D_1, β_1 – площина BB_1A, γ_2 – площина CC_2D_2, β_2 – площина BB_2A. Тоді $\gamma_1 || \beta_1$ і $\gamma_2 || \beta_2$, а $DC = \gamma_1 \cap \gamma_2$, $AB = \beta_1 \cap \beta_2$, при цьому $AB || DC$. (Якби AB і DC були не паралельні, то AB перетинала б або γ_1, або γ_2). Якщо точка C_3 така, що $C_2C_3 = DD_2$, то $\Delta DCC_3 = \Delta ABB_2$. Тому $DC = AB$, а отже, $ABCD$ – паралелограм.

XI КЛАС



Мал. 43



Мал. 44

1. *Див. мал. 43.* $(2; 3), [3; 7), [7; +\infty)$. **2.** $45°$. **3.** $\frac{43}{19}, \frac{\sqrt{105}-1}{2}$**.** *Вказівка.* Розв'яжіть рівняння на проміжках **4.** З рівностей $x_1 + x_2 = a$ й $x_1x_2 = a-1$ маємо $x_1^2 + x_2^2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1$. Тому найменше значення виразу $x_1^2 + x_2^2$ дорівнює 1 і досягається воно тоді, коли $a = 1$. **5.** З рівностей (мал. 44)

$$\angle ADK + \angle KDC + \angle DCK - \angle BCK = 180°,$$

$$\angle DKC + \angle KDC + \angle DCK = 180°,\ \angle AKD + \angle DKC - \angle BKC = 60°$$

нескладно отримати, що $\angle DKC = 30°$. **6.** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta < < \sin\alpha + \sin\beta,$ бо для гострих кутів $0 < \sin\gamma < 1, 0 < \cos\gamma < 1$. **7.** –1. Увівши позначення $f(x) = y,\ f(y) = z,\ f(z) = x,$ прийдемо до такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = y, \\ y^2 + 3y + 1 = z, \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = -1. \\ z^2 + 3z + 1 = x, \end{cases}$$

8. Нехай x, y, u, v – відстані вершини S піраміди до вершин A, B, C, D основи відповідно, $AB = DC = 16, AD = BC = 22, SO = 4$ (мал. 45). На прямій SO побудуємо точку S' так, щоб $SO = OS'$. Тоді за властивостями діагоналей паралелограма матимемо систему рівностей:

$$\begin{cases} S'S^2 + BD^2 = 2(y^2 + v^2), \\ S'S^2 + AC^2 = 2(x^2 + u^2), \end{cases} \Rightarrow 2S'S^2 + BD^2 + AC^2 = 2(y^2 + v^2 + x^2 + u^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + v^2 + x^2 + u^2 = 804.$$

Якщо d – різниця арифметичної прогресії, яку утворюють числа x, y, u, v, x – її перший член, а $y = x + d, u = x + 2d, v = x + 3d$, то приходимо до такого діофантового рівняння:

$$x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2 + (x+3d)^2 = 804 \Leftrightarrow 2x^2 + 6dx + 7d^2 = 402 \Rightarrow$$

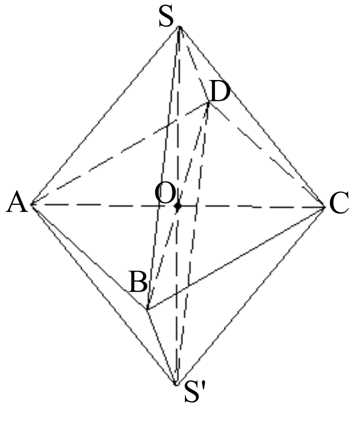
$$7d^2 < 402 \Rightarrow d < 8.$$

Оскільки d – парне число, то воно може дорівнювати тільки 2, 4 або 6. Перевіркою встановлюємо, що $d = 2$. Після цього знаходимо: $x = 11$, $y = 13, u = 15, v = 17$. **9.** Після нескладних рівносильних перетворень матимемо рівняння:

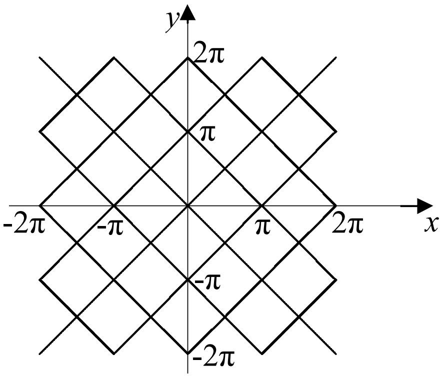
$$(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin^2 y = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 2y \Rightarrow y = \pm x + k\pi,\ k \in Z.$$

Множина точок, координати яких задовольняють дане рівняння, утворює прямокутну сітку, зображену на мал. 46.



Мал. 45



Мал. 46

10. Нехай $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin 2003x = A$. Помножимо рівність на $2\sin x \neq 0$ і виконаємо перетворення:

$$2A\sin x = 2(\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin 2003x)\sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2A\sin x = 1 - \cos 2004x.$$

Оскільки за умовою $1 - \cos 2004x = 2\sin x$, то $2A\sin x = 2\sin x.$Звідси маємо $A = 1$. Якщо $\sin x = 0$, то $A = 0$. *Відповідь*: 0, *якщо* $x = \pi n$; *1, якщо* $x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

11. З формули Герона маємо рівність $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Оскільки згідно з нерівністю Коші для трьох параметрів

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3,$$

то $\frac{S^2}{p} \leq \frac{p^3}{27} \Rightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow S \leq \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$.Далі застосуємо нерівність Коші-Буняковського

$$(a+b+c)^2 = (1\cdot a + 1\cdot b + 1\cdot c)^2 \leq \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Тому $S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$. **12.** $a \in \left[-2; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$. За допомогою похідної встановлюємо, що $x = \pm 1$ – точки екстремумів, а $f(-1) = a^2 - 3a - 2$ і $f(1) = a^2 + a - 2$ – екстремуми функції. Якщо $a > 0$, то $f(-1)$ – мінімум, який є і найменшим значенням функції f в області її визначення; $f(1)$ – максимум – найбільше значення f, тобто $[f(-1); f(1)]$ – множина значень функції f. Тому для розв'язання задачі треба розв'язати таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a^2 - 3a - 2 \leq 0, \\ a^2 + a - 2 \geq 1. \end{cases}$$

Її розв'язками будуть $a \in \left[1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$. У разі, коли $a < 0$, приходимо до наступної системи нерівностей:

$$\begin{cases} a < 0, \\ a^2 - 3a - 2 \geq 1, \\ a^2 + a - 2 \leq 0. \end{cases}$$

з якої знаходимо $a \in \left[-2; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right]$. **13.** Уведенням змінних $u = \sqrt{x}$, $v = f(u)$, $w = f(v)$ розв'язування рівняння зводиться до розв'язування циклічної системи рівнянь

$$\begin{cases} u^2 + 2u - 2 = v, \\ v^2 + 2v - 2 = w, \\ w^2 + 2w - 2 = u. \end{cases}$$

Якщо $u = v = w$, то система вироджується в одне рівняння $u^2 + u - 2 = 0$. Звідси знаходимо єдиний невід'ємний корінь цього рівняння $u = 1$, а разом з ним й один розв'язок $(1;1;1)$ цієї системи. Якщо $u > 1$, то, враховуючи монотонність функції $v = u^2 + 2u - 2$, матимемо $v > 1$; аналогічно матимемо $w > 1$. Додавши всі рівняння системи, дістанемо рівність $u^2 + v^2 + w^2 + u + v + w = 6,$ яка не може виконуватися для $u > 1$, бо її ліва частина більша за 6. Це означає, що система не має розв'язків, компоненти яких більші за 1. А тому й рівняння не має розв'язків більших за 1. Отже, 1 – єдиний цілий розв'язок рівняння. **14.** *Див. задачу 9 для 9-го класу.*

2003 – 2004 навчальний рік

VII КЛАС

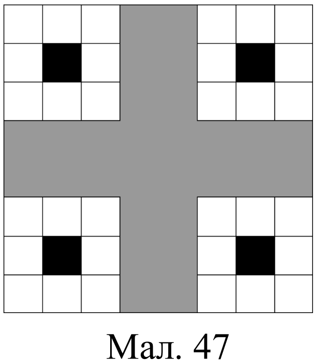
1. Нехай x – довжина сторони квадрата, найменшого після заштрихованого. Тоді з рівності протилежних сторін прямокутника маємо рівняння $8x - 8 = 4x + 12$, розв'язком якого є число 5. Тому 29 і 32 – довжини сторін прямокутника. **2.** Оскільки $a \neq 5$, то $\dfrac{a}{a-5}$ – розв'язок рівняння. Знайдемо ті значення параметра, при яких розв'язок буде кратний 3:

$$\frac{a}{a-5} = 3n \Leftrightarrow (a-5)(3n-1) = 5.$$

При цілих значеннях чисел a і n остання рівність може виконуватися тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a-5=1, \\ 3n-1=5; \end{cases} \quad \begin{cases} a-5=5, \\ 3n-1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} a-5=-1, \\ 3n-1=-5; \end{cases} \quad \begin{cases} a-5=-5, \\ 3n-1=-1. \end{cases}$$

З першої і останньої систем знаходимо $a = 6$ і $a = 0$, друга й третя системи рівнянь не мають цілих розв'язків. *Відповідь: 0, 6.* **3.** Якщо хоч одна із замальованих клітинок шахівниці (мал. 47) не буде покрита квадратом 2×2, то зрозуміло куди ще можна покласти квадрат 2×2. Тому надалі вважатимемо, що ці клітинки покриті квадратами. Прибудь-якому розміщенні інших чотирьох квадратів 2×2 на вільних клітинках (вони на малюнку заштриховані) ще знайдеться вільне місце щонайменше для одного такого квадрата.



Мал. 47

4. Покладемо на кожну шальку терезів по три монети. Якщо терези не зрівноважені, то фальшива монета на шальці, яка знаходиться вище. Коли ж терези зрівноважені, то фальшиву монету треба шукати серед монет, які не лежать на шальках терезів. Таким чином, одне зважування дозволяє виокремити три монети, серед яких одна фальшива. Наступне зважування двох монет з виокремлених трьох дає можливість встановити фальшиву монету.

5. Зрозуміло, що $Г = 0, В = 1$. Тому рівність запишеться так: $АБ1 + АБД = 10ДА$. Вона виконуватиметься, якщо $А = 5$. Тому $Д = 4$, а $Б = 2$. Маємо правильну рівність $5210 + 5240 = 10450$.

6. *117, 156, 195.*

$$\overline{abc} = 13(a+b+c) \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 13a + 13b + 13c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4c = 29a - b \Leftrightarrow c = \frac{29a-b}{4} \Leftrightarrow c = 7a + \frac{a-b}{4}.$$

Зрозуміло, що $a = 1$ і $\frac{1-b}{4}$ – ціле число. Останнє може бути тільки у випадках, коли b дорівнює 1, 5 або 9. Тоді c дорівнює 7, 6 або 5 відповідно.

7. $2^{64} - 1$.

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) =$$
$$= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) =$$
$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) =$$
$$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) = (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) =$$
$$= (2^{16}-1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) = (2^{32}-1)(2^{32}+1) = 2^{64} - 1.$$

8. Пронумеруємо мішки числами від 1 до 10. З кожного мішка візьмемо таку кількість монет, яка відповідає його номеру, і всі монети зважимо. Якщо вага монет буде $(1 + 2 + \ldots + 10) + k = 55 + k$ грамів, то двограмові монети містяться в мішку з номером k.

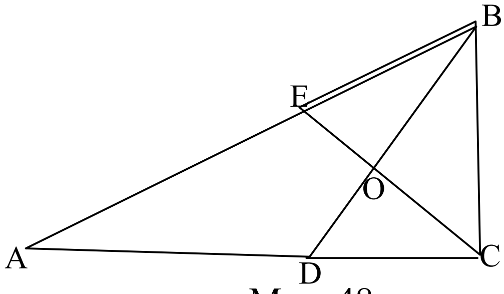
9. $-2,\ 2$.

$$\big||4|x|-3|-2\big| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |4|x|-3|-2 = 3, \\ |4|x|-3|-2 = -3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |4|x|-3| = 5, \\ |4|x|-3| = -1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4|x|-3 = 5, \\ 4|x|-3 = -5, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4|x| = 8, \\ 4|x| = -2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

10. *45 хв.* Нехай велосипедист подолає весь шлях за x годин, а автомобіль – за y годин. Тоді нескладно отримати такі рівності:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}, \quad \frac{2x}{3} = y + \frac{1}{4}.$$

Звідси знаходимо $x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4}$. **11.** Трикутники ADB і BCE рівнобедрені (мал. 48), тому $\angle BAD = = \angle ABD, \angle BEC = \angle CBE$. Знайдемо $\angle BOE$.



Мал. 48

$\angle BOE = 180° - (\angle BEO + \angle OBE) = 180° - 90° = 90°.$ Кути BOE і DOE – суміжні. Тому $\angle DOE = 90°.$ **12.** Припустимо, що не існує жодного слова, яке б написали всі учні. Позначимо через k, m і n кількість слів, які написали I і II, II і III, I і III учні відповідно. Тоді $k+m=18, m+n=29, n+k=27.$ Додаючи всі рівності, одержимо рівність $2(k+m+n)=69$, яка не може виконуватися при цілих невід'ємних значеннях k, m і n. Тому припущення неправильне. **13.** Нескладно переконатися, що добуток усіх дробів дорівнює $\frac{1}{100}$. Оскільки $\frac{1}{100} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$, а $\frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0$, то вираз дорівнюватиме нулю, якщо дев'яту зірочку замінити знаком дії віднімання, а всі інші – знаком дії множення. **14.** Нехай $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$ – шукані числа. Тоді повинна виконуватися така рівність:

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3376 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 200a + 200b + 200c + 20a + 20b + 20c + 2a + 2b + 2c = 3376 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 222(a+b+c) = 3376.$$

Якщо $a \cdot b \cdot c \neq 0$, то остання рівність неправильна, бо 3376 не ділиться без остачі на число 222. Тому одна з цифр повинна бути нулем. Нехай $c=0$. Тоді маємо рівність $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + = 3376$, яку запишемо так:

$$211(a+b) = 3376 \Leftrightarrow a+b=16 \Rightarrow a=7, b=9.$$

Відповідь: 0, 7, 9.

15. Позначимо фішки літерами C, C, B, B, A. Перший гравець виграє, якщо першим своїм ходом поставить фішку A на крайню праву клітинку, а відповідаючи на ходи суперника гратиме так, щоб фішки з однаковими літерами весь час були поруч.

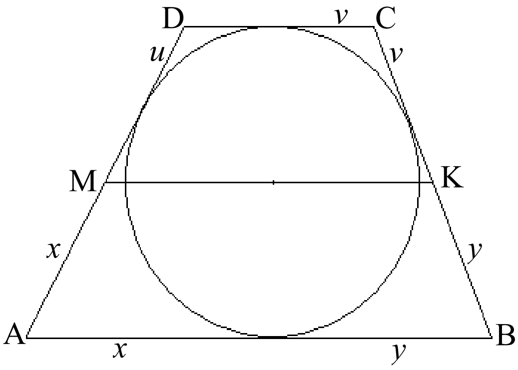
VIII КЛАС

1. Розглянемо тотожність $17(x+y) - 4(2x+3y) = 9x+5y.$ Оскільки зменшуване й від'ємник лівої частини тотожності діляться на 17, то й різниця $9x+5y$ також ділиться на 17. **2.** Точка перетину висот трикутника (її ще називають ортоцентром трикутника) має таку властивість: точки, симетричні ортоцентру відносно сторін трикутника, містяться на колі, описаному навколо цього трикутника. Тому спочатку треба побудувати точку C', симетричну точці H

відносно відрізка AB, потім провести коло через точки A, B, C'. Шукана точка C буде перетином побудованого кола і прямої $C'H$. **3.** Припустимо, що таке можна зробити. Візьмемо два сусідні числа x і y. Для них може мати місце один з трьох випадків: або вони непарні, або різної парності, або парні. У першому випадку наступне число z буде парним, бо $x \pm z = y$ – непарне. Продовжуючи міркування, отримаємо такі трійки чисел: Н, Н, П; Н, Н, П; ...; Н, Н, П. Нехай на тринадцятій позиції стоїть число a. Оскільки $x = a \pm y$, то число a мусить бути парним. Водночас воно повинно бути непарним, бо його сусіди – числа різної парності. Отже, поруч не можуть бути непарні число. Якщо числа x і y різної парності, то наступні два числа повинні бути непарними, а це знову приведе до суперечності. Насамкінець розглянемо випадок, коли числа x і y парні. Нескладно переконатися, що всі тринадцять чисел будуть парні. Поділивши ці числа на 2, одержимо 13 натуральних чисел, кожне з яких є сумою або різницею своїх сусідніх чисел. Ділити на 2 будемо до тих пір, поки серед чисел не з'явиться непарне число. Але тоді ми прийдемо до розглянутих випадків, які приводять до суперечності. **4.** *2; 3.* Запишемо рівняння так:

$$55y^2 = \left(xy^3 + 1\right)\left(229 - 55x^2\right).$$

Ця рівність може виконуватися тільки для двох натуральних значень змінної x: 1 або 2. Якщо $x = 1$, то приходимо до рівняння $y^2\left(55 - 174y\right) = 174$, яке не має розв'язків на множині натуральних чисел. У другому випадку маємо рівняння $y^2\left(55 - 18y\right) = 9$, натуральним розв'язком якого є тільки число 3. **5.** Це може бути тільки тоді, коли дискримінант квадратного тричлена, який міститься у лівій частині нерівності, дорівнює нулеві: $(2 - m)^2 - 4m(3 - 2m) = 0$. Звідси знаходимо $m = \dfrac{8 \pm 2\sqrt{7}}{9}$. **6.** Якщо турист рухатиметься за течією, то за один цикл «веслування – відпочинок», який триває 45 хв, він віддалятиметься від бази на 2,55 км. Тобто об 11 годині він буде на відстані 2,55 км від бази. За один цикл «веслування – відпочинок» проти течії він зможе наблизитися до бази тільки на 0,45 км, бо за півгодини веслування пройде 0,8 км, а за 15 хв відпочинку течія знесе його на 0,35 км. Враховуючи, що за 2 год він здійснить два цикли «веслування – відпочинок» і буде ще веслувати 30 хв, то він наблизиться до бази на 1,7 км, а тому не зможе повернутися до 13 год на базу. Якщо турист вирушить з бази проти течії, то за 2 год він віддалиться від бази на 1,7 км і в нього ще залишиться 45 хв на повернення. За 15 хв відпочинку течія знесе його на 0,35 км, а останні 1,35 км, рухаючись із швидкістю 4,4 км/год, він пройде приблизно за 18 хв і вчасно повернеться на базу. **7.** Нехай R_1 і R_2 – радіуси кіл, діаметрами яких є бічні сторони AD і BC трапеції $ABCD$ відповідно (мал. 49), MK – середня лінія трапеції.



Мал. 49

Тоді

$$R_1 = \frac{u+x}{2},\ R_2 = \frac{v+y}{2} \text{ і } R_1 + R_2 = \frac{u+x}{2} + \frac{v+y}{2} = \frac{AB+CD}{2} = MK.$$

Оскільки відстань між центрами M і K кіл дорівнює сумі їхніх радіусів, то кола дотикаються. **8.** Так, обов’язково. Якщо розфарбувати клітинки дошки й жуків, які на них сидять, у два кольори за схемою шахівниці, то клітинок одного кольору, наприклад чорного, буде на одну більше, ніж білих клітинок. Оскільки чорні жуки переповзуть на білі клітинки, а 12 білих жуків переповзають на 13 чорні клітинки, то щонайменше одна чорна клітинка залишиться вільною. **9.** Виходячи з означення модуля, маємо

$$x + |x| = \begin{cases} 2x, \text{ ÿêùî } \ x > 0, \\ 0, \text{ ÿêùî } \ x < 0. \end{cases}$$

Тому функція означена тільки на множині додатних чисел і її графіком є пряма $y = \frac{5x}{2} - \frac{1}{2},\ x > 0.$ **10.** 0,5. **11.** Поділимо многочлен $n^4 - 22n^2 - 46$ на $n+5$:

$$\frac{n^4 - 22n^2 - 46}{n+5} = n^3 - 5n^2 + 3n - 15 + \frac{29}{n+5}.$$

Оскільки 29 – просте число, то $\frac{29}{n+5}$ буде цілим числом тільки тоді, коли $n = 24.$ **12.** Спочатку обчислимо p:

$$p = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}\left(\frac{158^2 + 158\cdot 185 + 185^2}{158+185} + \frac{158^2 - 158\cdot 185 + 185^2}{185-158}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(185-158)(158^2 + 158\cdot 185 + 185^2) + (185+158)(158^2 - 158\cdot 185 + 185^2)}{343\cdot 27} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{185^3 - 158^3 + 158^3 + 185^3}{7^3 3^3} = \left(\frac{185}{21}\right)^3.$$

Далі з рівняння $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = \left(\frac{185}{21}\right)^3$ знаходимо $x = 5.$ **13.** Якщо число $B-1$ ділиться на 10, то число B закінчується цифрою 1, а число $B+41$ – цифрою 2 і не може бути квадратом натурального числа; число $B-48$ повинно закінчуватися цифрою 3 і також не може бути квадратом натурального числа.

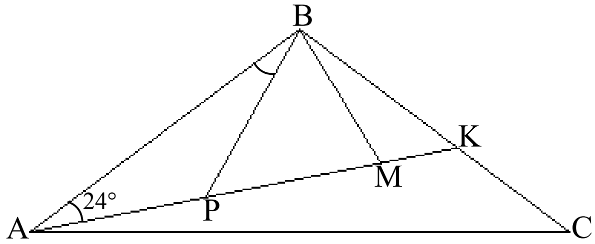
Тому друге твердження хибне, а перше й третє – істинні. Нехай $B+41=n^2$, $B-48=k^2$. Тоді

$$n^2-k^2=89 \Leftrightarrow (n-k)(n+k)=89 \Rightarrow \begin{cases} n-k=1, \\ n+k=89, \end{cases} \Rightarrow n=45, k=44 \Rightarrow B=1984.$$

14. Продовжимо одну сторону кута в протилежному напрямі, а від іншої 4 рази відкладемо заданий кут. Одержимо кут, величина якого дорівнює $5°$. **15.** На відрізку AM побудуємо точку P так, щоб трикутник APB був рівнобедрений (мал. 50). Тоді

$$\angle BPK = \angle PAB + \angle PBA = 48°, \angle PBM = 90° - 24° = 66°,$$
$$\angle PMB = 180° - (66° + 48°) = 66°,$$

тобто трикутник BPM – рівнобедрений. Тепер маємо такий ланцюжок рівностей: $AP = PB = PM = BK$. Тому й трикутник PBK – рівнобедрений, а $\angle PKB = \angle BPK = 48°$. Далі знаходимо $\angle ABK = 180° - (24° + 48°) = 108°$, $\angle BAC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$.



Мал. 50

IX КЛАС

1. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n} + \underbrace{11...11}_{n+1} = \underbrace{11...11}_{n+1} \cdot 10^n + \underbrace{11...11}_{n+1} = \underbrace{11...11}_{n+1} \cdot (10^n + 1)$.

2. Зазначимо, що коренями рівняння не можуть бути числа 1 і -1. Після виконання перетворень отримаємо рівняння $(a+b-1)x = a+b+1$. Якщо $a+b \neq 1$, то $x = \frac{a+b+1}{a+b-1}$. Враховуючи, що $x \neq \pm 1$, отримуємо ще одне обмеження: $a+b \neq 0$. *Відповідь:* $\frac{a+b+1}{a+b-1}$, якщо $a+b \neq 1$ і $a+b \neq 0$. **3.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Оскільки $[x]+\{x\}=x$, то маємо рівняння $x+1 = x|x|$. **4.** 0. Позначимо вираз через A_n і перетворимо його, враховуючи, що

$$1+2+...+n = \frac{(1+n)n}{2}:$$

$$A_n = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 - \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} =$$

$$= 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 - \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} =$$

$$=1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3-\frac{\left(((n-1)+1)(n-1)\right)^2}{4}=$$

$$=1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3-\left(1+2+\ldots(n-1)\right)^2=A_{n-1}.$$

Ми отримали рекурентну формулу $A_n=A_{n-1}$, яка правильна для всіх натуральних чисел n. Оскільки $A_1=1^3-1^2=0$, то $A_2=A_3=\ldots=A_n=0$.

5. Визначимо цілі числа $m, n,$ і k так, щоб виконувалася рівність:

$$31(kx+ny)-m(6x+11y)=x+7y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(31k-6m)x+(31n-11m)y=x+7y\Rightarrow\left[\begin{array}{l}31k-6m=1,\\31n-11m=7.\end{array}\right.$$

Нескладно помітити, що такими числами є $m=5, n=2, k=1$. Тому

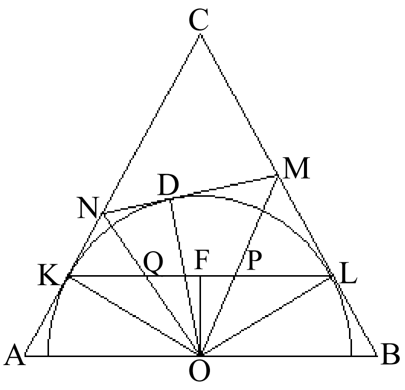
$$31(x+2y)-5(6x+11y)=x+7y.$$

Оскільки і зменшуване, і від'ємник діляться на 31, то й різниця також ділиться на 31. **6.** Спочатку перетворимо ліву частину нерівності, а потім використаємо співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним:

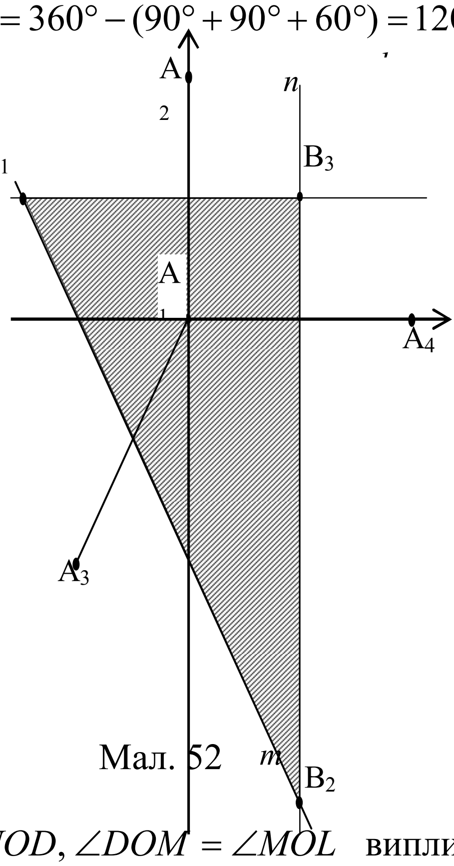
$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2.$$

7. Доведемо, що трикутники *OQP* і *OMN* подібні (мал. 51). Для цього обчислимо $\angle KOL$.

$$\angle KOL=360°-\left(\angle OKC+\angle OLC+\angle KCL\right)=360°-(90°+90°+60°)=120°.$$



Мал. 51



Мал. 52

З рівностей $\angle KOL=120°$ і $\angle KON=\angle NOD, \angle DOM=\angle MOL$ випливає, що $\angle NOM=60°$. Враховуючи паралельність прямих KL і AB, робимо висновок про подібність трикутників QKN, QOP і MLP. З ланцюжка рівностей

$\angle OPQ = \angle KNQ = \angle KNO = \angle DNO$ випливає подібність трикутників OQP і OMN. Для визначення коефіцієнта подібності k цих трикутників порівняємо їхні відповідні висоти. Висота OD трикутника OMN дорівнює радіусу вписаного півкола, а висота OF трикутника OQP – половині цього радіуса. Тому $k = 2$, а $NM = 2PQ$. **8.** Оскільки $11111 = 41 \cdot 271$ і 11111 – найменше число, записане цифрою 1, яке ділиться на 41, то задане число записане $5n$ цифрами, де n – деяке натуральне число. **9.** Розв'язки рівняння, якщо вони існують, містяться на проміжку $[0; 2]$. На цьому відрізку рівняння рівносильне такому:

$$x^5 + 2x^3 - 2x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 21\right) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

10. Зробимо це для точки A_1 (мал. 52). Точки серединного перпендикуляра l, проведеного до відрізка A_1A_2, рівновіддалені від точок A_1 і A_2. Цей перпендикуляр поділяє всю площину на дві півплощини. Відстань точок півплощини, в якій міститься точка A_1, до точки A_1 менша за їхню відстань до точки A_2. Щоб знайти точки площини, відстань яких до точки A_1 менша за їхню відстань до інших точок A_3 і A_4, проведемо серединні перпендикуляри m і n до відрізків A_1A_3, A_1A_4 відповідно і виберемо півплощини, яким належить точка A_1. Шуканою множиною точок буде трикутник з вершинами $B_1(-3;1)$, $B_2(2;-4), B_3(2;1)$, що є перетином трьох вказаних півплощин. Для точок A_2, A_3, A_4 шукані множини будуються аналогічно. **11.** $2, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Більший корінь заданого рівняння обчислюється за формулою

$$x_0 = \frac{a + b + \sqrt{(a-b)^2 + 4c}}{2}.$$

Умова $x_0 < 3$ виконуватиметься, якщо

$$\sqrt{(a-b)^2 + 4c} < 6 - (a+b) \Leftrightarrow a + b < 6 - \sqrt{(a-b)^2 + 4c}.$$

Тому для коефіцієнтів $a, b, c \in \mathbf{N}$ повинна виконуватися нерівність $2 \le a + b \le 3$. Якщо $a + b = 2$, то $a = b = 1$ і $x_0 = \dfrac{2+\sqrt{4c}}{2} < 3$ для $c = 1, 2, 3$. Якщо $a + b = 3$, то $(a-b)^2 = 1$ і $x_0 = \dfrac{3+\sqrt{1+4c}}{2} < 3$ для $c = 1$. У всіх інших випадках умова $x_0 < 3$ не виконується. **12.** Число n треба шукати серед чисел, для яких $6n$ і $9n$ трицифрові числа, а $13n$ – чотирицифрове:

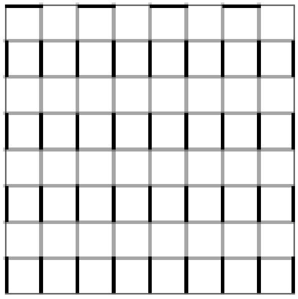
$$\begin{cases} 100 \le 6n \le 999, \\ 100 \le 9n \le 999, \quad \Rightarrow 77 \le n \le 111. \\ 1000 \le 13n \le 9999 \end{cases}$$

Утворимо число a:

$$a = 13n \cdot 10^6 + 9n \cdot 10^3 + 6n = 13009006n.$$

У десятковому запису цього десятицифрового числа використовуються всі цифри десяткової системи числення. Тому a ділиться на 9. Оскільки число

13009006 взаємно просте з 9, то число n повинне ділитися на 9. Отже, число n треба шукати серед чисел 81, 90, 99, 108. *Відповідь: 81.* **13.** *Ні, не завжди*. Приклад потрібного розфарбування наводиться на мал. 53.



Мал. 53

14. *1-й спосіб.* З очевидної рівності

$$(ax+by+cz)x+(ax+by+cz)y+(ax+by+cz)z=0$$

після перетворень маємо таку рівність:

$$bxy+cxz+axy+cyz+axz+byz=-ax^2-by^2-cz^2.$$

Далі перетворимо ліву частину заданої нерівності.

$$(a+\sqrt{ab}+b)xy+(b+\sqrt{bc}+c)yz+(c+\sqrt{ca}+a)zx=$$
$$=xy\sqrt{ab}+yz\sqrt{bc}+zx\sqrt{ca}-(bxy+cxz+axy+cyz+axz+byz)=$$
$$=xy\sqrt{ab}+yz\sqrt{bc}+zx\sqrt{ca}-ax^2-by^2-cz^2=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\left(x\sqrt{a}-y\sqrt{b}\right)^2+\left(y\sqrt{b}-z\sqrt{c}\right)^2+\left(z\sqrt{c}-y\sqrt{b}\right)^2\right)\le 0.$$

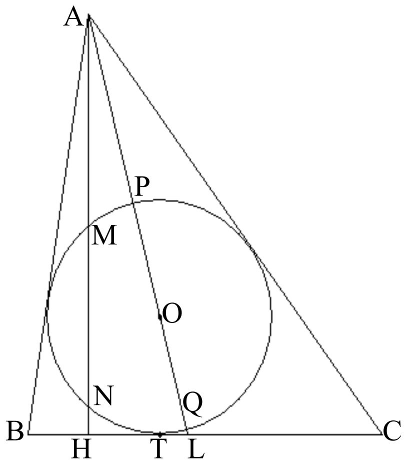
2-*й спосіб*. Виконаємо перетворення в лівій частині нерівності і посилимо її, використовуючи нерівність Коші:

$$\left(a+\sqrt{ab}+b\right)xy+\left(b+\sqrt{bc}+c\right)yz+\left(c+\sqrt{ca}+a\right)zx=$$
$$=axy+\sqrt{ab}xy+bxy+byz+\sqrt{bc}yz+cyz+czx+\sqrt{ca}zx+azx\le$$
$$\le axy+\frac{ax^2+by^2}{2}+bxy+byz+\frac{by^2+cz^2}{2}+cyz+czx+\frac{cz^2+ax^2}{2}+azx=$$
$$=axy+bxy+byz+cyz+czx+azx+ax^2+by^2+cz^2=$$
$$=(ax+by+cz)x+(ax+by+cz)y+(ax+by+cz)z=0.$$

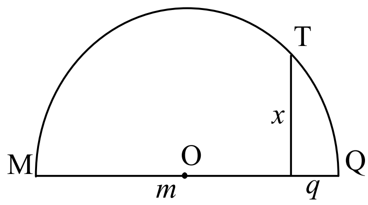
3-*й спосіб*. Знову виконаємо перетворення в лівій частині нерівності і посилимо її, використовуючи нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(a+\sqrt{ab}+b\right)xy+\left(b+\sqrt{bc}+c\right)yz+\left(c+\sqrt{ca}+a\right)zx=$$
$$=axy+\sqrt{ab}xy+bxy+byz+\sqrt{bc}yz+cyz+czx+\sqrt{ca}zx+azx=$$
$$=axy+bxy+byz+cyz+czx+azx+\left(\sqrt{a}x\cdot\sqrt{b}y+\sqrt{b}y\cdot\sqrt{c}z+\sqrt{c}z\cdot\sqrt{a}x\right)\le$$
$$\le axy+bxy+byz+cyz+czx+azx+\sqrt{ax^2+by^2+cz^2}\cdot\sqrt{by^2+cz^2+ax^2}=$$
$$=axy+bxy+byz+cyz+czx+azx+ax^2+by^2+cz^2=$$
$$=(ax+by+cz)x+(ax+by+cz)y+(ax+by+cz)z=0.$$

15. Відновити трикутник ABC можна виконуючи такі побудови (мал. 54). 1. Через точки M і H проведемо пряму h 2. Через точку H проведемо пряму a, перпендикуляру до прямої h. 3. Будуємо коло ω, яке проходить через точки M, Q і дотикається до прямої a. 4. Через точку Q і центр кола ω проводимо



Мал. 54



Мал. 55

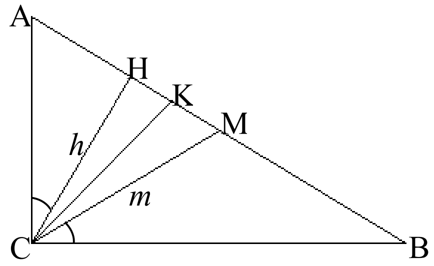
пряму, що перетнеться з прямою h в точці A. 5. З точки A проводимо дотичні до кола ω, які перетнуться з прямою a в точках B і C. Нескладно довести, що трикутник ABC – шуканий. *Примітка.* Для побудови кола ω спочатку потрібно побудувати точку T, в якій воно дотикається до прямої a. Нехай L точка перетину прямих a і MQ. Оскільки $LT^2 = LQ \cdot LM$, то відрізок LT є середнім геометричним відрізків LQ і LM. Його побудова наведена на мал. 55, де m, q, x – довжини відрізків LM, LQ, LT відповідно.

X КЛАС

1. $(3;3), \left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right), (2;-3), (3;-3)$. Розклавши на множники ліву частину другого рівняння системи, отримаємо рівносильну систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 2y^2 - 12 = 0, \\ (x-y)(y+3) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 5x + 2y^2 - 12 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 2y^2 - 12 = 0, \\ y + 3 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

2. З мал. 56 зрозуміло, що відрізок CK є бісектрисою $\angle HCM$. Тому $\frac{CH}{HK} = \frac{CM}{MK}$. Оскільки $MK = HM - HK, HM = \sqrt{m^2 - n^2}$, то $HK = h\sqrt{\frac{m-h}{m+h}}$. Далі знаходимо $CK = h\sqrt{\frac{2m}{h+m}}$.



Мал. 56

3. Нехай функція f задовольняє обидві умови задачі. Тоді для $x = n, y = kn$, де n, m – довільні натуральні числа, а $k = 1, ..., m-1$, маємо такі рівності:

$$f(2n) = 2f(n) + n^2,$$
$$f(3n) = f(n) + f(2n) + 2n^2,$$
$$f(4n) = f(n) + f(3n) + 3n^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(mn) = f(n) + f((m-1)n) + (m-1)n^2.$$

Додавши всі ці рівності, одержимо

$$f(mn) = mf(n) + (1+2+3+...+(m-1))n^2.$$

Враховуючи, що $1+2+3+...+(m-1) = \dfrac{m(m-1)}{2}$, маємо рівність

$$f(mn) = mf(n) + \frac{m(m-1)}{2} \cdot n^2,$$

яка виконується для всіх натуральних m, n. Зокрема, для $n = 1$ одержуємо рівність $f(m) = \dfrac{m(m+1)}{2}$, що визначає функцію f на множині натуральних чисел. Перевірка:

а) $\quad f(1) = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1,$

б) $\quad f(x+y) = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = \dfrac{(x^2+x)+(y^2+y)+2xy}{2} =$

$$= \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + xy = f(x) + f(y) + xy,$$

4. Зрозуміло, що йдеться про будинки з непарними номерами. Нехай $2x+1$ – номер першого, а $2y-1$– номер останнього будинку названого кварталу. Беручи до уваги, що сума перших n непарних натуральних чисел обчислюється за формулою $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$, дістанемо рівняння

$$y^2 - x^2 = 235 \quad \Leftrightarrow \quad (y-x)(y+x) = 235,$$

яке на множині натуральних чисел рівносильне сукупності чотирьох систем:

$$\begin{cases} y-x=1, \\ y+x=235; \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=235, \\ y+x=1; \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=5, \\ y+x=45; \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=45, \\ y+x=5. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $x=117, y=118$ і $x=21, y=26$. Отже, або в кварталі один будинок з номером 235, або 5 будинків з номерами 43, 45, 47, 49, 51. **5.** Сума квадратів лівих частин рівнянь дорівнює 1, тому

$$y^2\cos^6 t + y^2\sin^6 t = 1 \Leftrightarrow y^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\left(\cos^4 t+\cos^4 t-\sin^2 t\cos^2 t\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2\left(\left(\cos^2 t+\cos^2 t\right)^2-3\sin^2 t\cos^2 t\right)=1 \Leftrightarrow\ y^2\left(1-3\sin^2 t\cos^2 t\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 t\cos^2 t = \frac{y^2-1}{3y^2}.$$

Далі помножимо перше рівняння на $\cos 3t$, а друге на $\sin 3t$ і додамо їх:

$$\cos(x+3t)\cos 3t+\sin(x+3t)\sin 3t = y\cos^3 t\cos 3t - y\sin^3 3t\sin 3t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = y\left(\cos^3 t\cos 3t-\sin^3 3t\sin 3t\right).$$

Враховуючи формули потрійних аргументів

$$\cos 3t = 4\cos^3 t-3\cos t, \quad \sin 3t = 3\sin t-4\sin^3 t$$

і отриману рівність $y^2\cos^6 t+y^2\sin^6 t=1$, маємо:

$$\cos^3 t\cos 3t-\sin^3 3t\sin 3t = 4\cos^6 t-3\cos^4 t-3\sin^4 t+4\sin^6 t =$$

$$=\frac{4}{y^2}-3\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)=\frac{4}{y^2}-3\left(1-2\cos^2 t\sin^2 t\right).$$

Тому $\cos x=\frac{4}{y^2}-3\left(1-2\cos^2 t\sin^2 t\right)$. Насамкінець отримуємо рівність

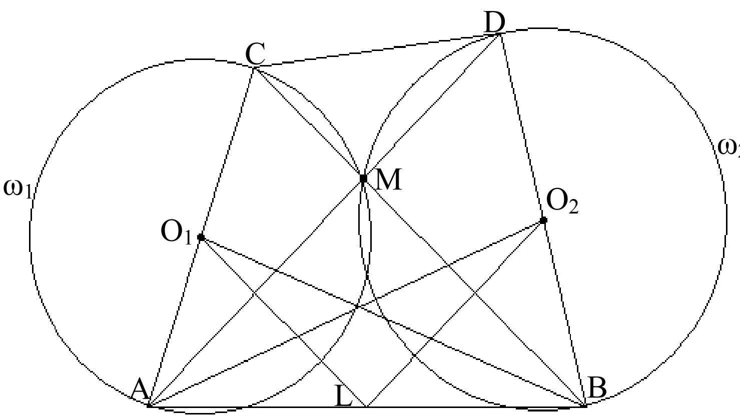
$$y^2+y\cos x=2,$$

що залишається після виключення параметра t. **6.** Нехай C і D точки, в яких прямі BM і AM перетинають кола ω_1 і ω_2 відповідно (мал. 57). Тоді відрізки AC і BD є діаметрами цих кіл, а відрізки BO_1 і AO_2 – медіанами трикутників ABC і BAD відповідно. Тому

$$4BO_1^2+4r_1^2=2AB^2+2CB^2, \quad 4AO_2^2+4r_2^2=2AB^2+2AD^2.$$

Звідси

$$2BO_1^2+2AO_2^2+2r_1^2+2r_2^2=2AB^2+CB^2+AD^2.$$



Мал. 57

Нехай L – середина відрізка AB. Тоді LO_1 – середня лінія трикутника BAC, LO_2 – середня ліня трикутника BAD. Тому $CB=2O_1L, AD=2LO_2$ і

$\angle O_1LO_2 = 90°$. Далі знаходимо $CB^2 + AD^2 = 4LO_1^2 + 4LO_2^2 = 4O_1O_2^2 = 4d^2$, де d – відстань між центрами кіл. Насамкінець маємо $BO_1^2 + AO_2^2 - AB^2 = 2d^2 - r_1^2 - r_2^2$.
7. Позначимо через S_n задану суму. Нескладно переконатися, що $S_n > n$. Знайдемо її верхню межу. Для цього оцінимо зверху кожний доданок суми, використовуючи нерівність Коші:

$$\sqrt[k]{\frac{k}{k-1}} = \sqrt[k]{\frac{k}{k-1}\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{k-1}} \le \frac{\frac{k}{k-1} + \overbrace{1+1+\ldots+1}^{k-1}}{k} =$$

$$= \frac{k^2-k+1}{k^2-k} = 1 + \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Маємо

$$S_n \le \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = n + 1 - \frac{1}{n+1} < 1 + n.$$

Оскільки $n < S_{n+1} < n+1$, то $[S_n] = n$. **8.** Розглянемо множину раціональних чисел $\frac{k}{n}$, де $k = 1, \ldots, 100;\ n = 1, \ldots, 100$. У цій множині 10000 чисел, серед них 100 дорівнює 1, а інші утворюють 4950 пар обернених чисел $\frac{k}{n}$ і $\frac{n}{k}$. Оскільки $f(1) = \frac{1}{2}$, а $f\left(\frac{n}{k}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) = 1$, то шукана сума дорівнює 5000. **9.** Нехай (a, b, c) – розв'язок системи і $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо $a = b = c$, то система вироджується в одне рівняння $\cos a = tga$, з якого знаходимо $\sin a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. У випадку, коли $a = b$, спочатку знаходимо $\sin a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, а потім з рівності $\cos c = tga$ визначаємо $\sin c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Насамкінець зупинимося на випадку, коли всі числа a, b, c різні. Розташуємо їх у прядку зростання. Нехай $a < b < c$. Тоді $\cos a = tgb < tgc = \cos b$. Одержана нерівність $\cos a < \cos b$ суперечить монотонності косинуса. Отже, $a = b = c$, а тому $\sin a = \sin b = \sin c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
10. Нехай $\alpha^2 + \alpha = x, \alpha^3 + 2\alpha = y$. Тоді

$$y = (\alpha^3 + \alpha^2) - \alpha^2 - \alpha + 3\alpha = \alpha(\alpha^2 + \alpha) - (\alpha^2 + \alpha) + 3\alpha = \alpha x - x + 3\alpha.$$

Звідси $\alpha = \frac{x+y}{x+3}$. Оскільки x і y – раціональні числа, то число α також раціональне. **11.** Припустимо, що існують непарні числа a, b, c такі, що $ab^3 - 2003$, $bc^3 + 2005$ і $ca^3 - 2007$ є квадратами натуральних чисел. Тоді кожне з них повинне ділитися без остачі на 4. Тому $ab^3 = 4k + 3$, $bc^3 = 4m + 3$,

$ca^3 = 4n+3$. Розглянемо рівність $ab^3 \cdot bc^3 \cdot ca^3 = (abc)^4$. При діленні лівої частини рівності на 4 одержимо остачу 3, а ділячи праву частину на 4, матимемо остачу 1. Ця суперечність виникла за рахунок хибного припущення. Отже, не існують непарні числа a, b, c, які задовольняють умові задачі.

12. Виконуючи очевидні рівносильні перетворення, отримаємо рівняння

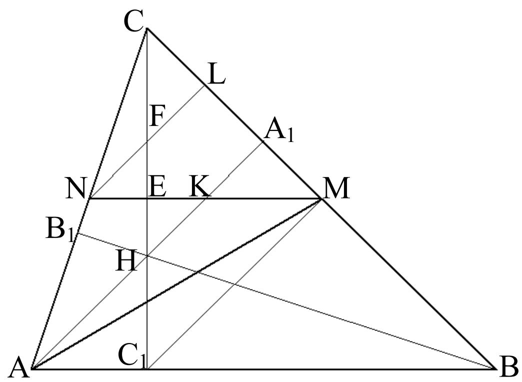
$$(x-[x])\left(1-\frac{2004}{x[x]}\right)=0.$$

Оскільки x не є цілим числом, то $x-[x]\neq 0$, а тому

$$1-\frac{2004}{x[x]}=0 \Leftrightarrow x[x]=2004 \Leftrightarrow \begin{cases}[x]=k,\\ k<x<k+1,\\ kx=2004,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2004}{k},\\ k<\dfrac{2004}{k}<k+1.\end{cases}$$

Спочатку з подвійної нерівності знаходимо $k=-45$, а потім $x=-\dfrac{2004}{45}$.

13. З умови задачі безпосередньо випливає, що трикутник ABC гострокутний (мал. 58). Нехай H – точка перетину висот AA_1, BB_1, CC_1



Мал. 58

цього трикутника. Якщо $K = AA_1 \cap MN$, то $NK = KM$. Проведемо висоту NL трикутника NCM. Тоді $NL \parallel AA_1$. За теоремою Фалеса $CL = LA_1 = A_1M$. Нехай $F = CC_1 \cap NL, E = CC_1 \cap NM$. Оскільки $MN \parallel AB$ і $AH : HK = 2:1$, то $C_1H : HE = 2:1$. Далі, якщо $h_c = CC_1$, то $CE = EC_1 = \frac{1}{2}h_c$, $HE = \frac{1}{3}EC_1 = \frac{1}{6}h_c$, $HC_1 = \frac{1}{3}h_c$. Таким чином, $CH = \frac{2}{3}h_c, CF = FH = \frac{1}{3}h_c$, бо точка F середина CH. З рівності відношень $CH : CC_1 = 2:3 = CA_1 : CM$ випливає, що $C_1M \parallel HA_1$. Тому, $C_1M \perp CB$, а отже, рівності $C_1M = MC = MB$ дають підставу зробити висновок, що $\angle ABC = 45°$. **14.** *1-й спосіб.* Спочатку доведемо допоміжну нерівність для додатних чисел u, v:

$$\frac{u^3}{v}+\frac{v^3}{u}\geq\frac{(u+v)^2}{2} \Leftrightarrow 2u^4+2v^4 \geq uv(u+v)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(u^4+2u^2v^2+v^4\right)+\left(u^4-2u^2v^2+v^4\right)-uv(u+v)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(u^2-v^2\right)^2+(u-v)^2\left(u^2+uv+v^2\right)\geq 0.$$

Далі будемо перетворювати і послаблювати ліву частину заданої нерівності.

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}=\left(\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}\right)+\left(\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}\right)+\left(\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{y}\right)\geq$$

$$\geq\frac{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2}{2}=\frac{(1-z)^2+(1-x)^2+(1-y)^2}{2}=$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2+3-2(x+y+z)}{2}=\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$

2-й спосіб. Цього разу використаємо допоміжну нерівність $\frac{u^2}{v}\geq 2u-v$, яка випливає з співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним для двох додатних чисел:

$$\frac{u^2}{v}\geq 2u-v\Leftrightarrow u^2\geq 2uv-v^2\Leftrightarrow\frac{u^2+v^2}{2}\geq uv,$$

і нерівність $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$, яка випливає з рівності $x+y+z=1$:

$$x+y+z=1\Leftrightarrow(x+y+z)^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=1\Rightarrow$$

$$1=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\leq x^2+y^2+z^2+\left(x^2+y^2\right)+\left(y^2+z^2\right)+\left(x^2+z^2\right)=$$

$$=3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}.$$

Перетворимо ліву частину заданої нерівності.

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}=\frac{x^4}{xy}+\frac{y^4}{yz}+\frac{z^4}{xz}+\frac{x^4}{xz}+\frac{y^4}{xy}+\frac{z^4}{yz}\geq$$

$$\geq 2x^2-xy+2y^2-yz+2z^2-xz+2x^2-xz+2y^2-xy+2z^2-yz=$$

$$=4\left(x^2+y^2+z^2\right)-(2xy+2yz+2zx)=$$

$$=5\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)=$$

$$=5\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)^2=5\left(x^2+y^2+z^2\right)-1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+9\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\right)\geq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+9\cdot\frac{1}{3}-2\right)=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$

3-й спосіб. Послабимо ліву частину нерівності за допомогою нерівностей Коші-Буняковського і Коші.

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}=\frac{x^4}{xy}+\frac{y^4}{yz}+\frac{z^4}{zx}=\frac{1}{xy+yz+zx}(xy+yz+zx)\left(\frac{x^4}{xy}+\frac{y^4}{yz}+\frac{z^4}{zx}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{xy+yz+zx}\left(\sqrt{xy}\frac{x^2}{\sqrt{xy}}+\sqrt{yz}\frac{y^2}{\sqrt{yz}}+\sqrt{zx}\frac{z^2}{\sqrt{zx}}\right)^2\geq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2+y^2+z^2}=x^2+y^2+z^2.$$

Аналогічно отримуємо нерівність

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge x^2+y^2+z^2.$$

Тому

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge 2\left(x^2+y^2+z^2\right)=\frac{x^2+y^2+z^2+3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}.$$

Оскільки $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}$, то $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}$.

4-й спосіб. Перетворюватимемо ліву частину заданої нерівності, послаблюючи її за рахунок аналога нерівності Коші-Буняковського (*див. додаток*), нерівності Коші та встановленої вище нерівності $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge 1$:

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}=\frac{x^4}{xy}+\frac{y^4}{yz}+\frac{z^4}{zx}+\frac{x^4}{xz}+\frac{y^4}{xy}+\frac{z^4}{yz}\ge$$

$$\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2\right)^2}{xy+yz+zx+xz+xy+yz}=\frac{4\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{2(xy+yz+zx)}\ge\frac{4\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{2\left(\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}\right)}=$$

$$=\frac{4\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)+3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)+1}{2}.$$

15. Покажемо, що існує тільки два розфарбування, котрі задовольняють умову задачі. А саме, коли всі непарні числа сині, а парні жовті, і навпаки. Припустимо, що існують числа n і $n+2$, які пофарбовані в різні кольори. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що n синє, а $n+2$ жовте число. Візьмемо жовте число $m_1>n+2$ таке, що $s_1=m_1+1$ синє число, а також жовте число $m_2>m_1$ таке, що $s_2=m_2+1$ синє число. Далі, виберемо жовте число $m_i>m_{i-1}$ так, щоб число $s_i=m_i+1$ було синім, а також синє число $s_{i+1}>m_i+1$ таке, що число $m_{i+1}=s_{i+1}+1$ жовте (тут $i=3,5,7,\dots,2001$). Оскільки чисел кожного кольору безліч, то таке завжди можна здійснити. Розглянемо набір із 2003 синіх чисел $n<s_1<s_2<s_3<\dots<s_{2002}$, сума елементів яких становить

$$S=n+\left(m_1+1\right)+\left(m_2+1\right)+\left(\left(m_3+1\right)+s_4\right)+\left(\left(m_5+1\right)+s_6\right)+\dots+\left(\left(m_{2001}+1\right)+s_{2002}\right)$$

і є числом синім. Розглянемо також набір із 2003 жовтих чисел

$$n+2<m_1<m_2<m_3<\dots<m_{2002},$$

сума елементів якого дорівнює жовтому числу M, де

$$M=(n+2)+m_1+m_2+\left(m_3+\left(s_4+1\right)\right)+\left(m_5+\left(s_6+1\right)\right)+\dots+\left(m_{2001}+\left(s_{2002}+1\right)\right).$$

Оскільки $S=M$, в чому нескладно переконатися, то ми прийшли до суперечності. Таким чином, всі числа однакової парності обов'язково є одноколірними, а різної парності – різноколірними. Отже, числа 1 і 2004 є різноколірними.

XI КЛАС

1. *1-й спосіб.* Нехай O – точка перетину діагоналей чотирикутника, α – кут між ними. Тоді, застосовуючи теорему косинусів, одержимо

$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos\alpha + CO^2 + OD^2 - 2CO \cdot OD \cos\alpha,$$

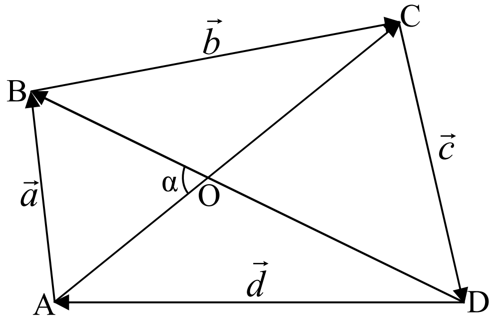
$$BC^2 + AD^2 = BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cos(180^\circ - \alpha) + \\ + AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cos(180^\circ - \alpha).$$

Порівнюючи праві частини цих співвідношень, матимемо рівність

$$-2\left(AO \cdot OB + CO \cdot OD\right)\cos\alpha = 2\left(BO \cdot OC + AO \cdot OD\right)\cos\alpha,$$

яка можлива тільки за умови, що $\cos\alpha = 0$. Отже, $\alpha = 90^\circ$.

2-й спосіб. Запишемо задану рівність, використовуючи вектори (мал. 59), і перетворимо її:



Мал. 59

$$\vec{a}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} = \vec{b}^{\,2} + \vec{d}^{\,2} \Leftrightarrow \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = \vec{d}^{\,2} - \vec{c}^{\,2} \Leftrightarrow \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\vec{d} - \vec{c}\right)\left(\vec{d} + \vec{c}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\overline{AC} = -\left(\vec{d} - \vec{c}\right)\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AC}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{d} - \vec{c}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

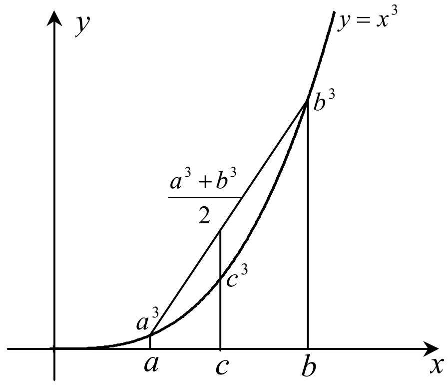
$$\Leftrightarrow \overline{AC}\left(\left(\vec{a} + \vec{d}\right) - \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0 \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{DB}.$$

2. *1-й спосіб.*

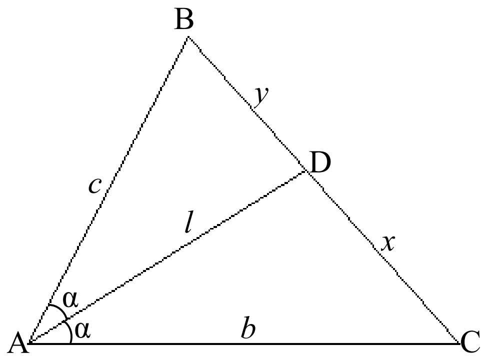
$$\frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{3(a+b)(a-b)^2}{8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

2-й спосіб. Утворимо функцію $f(x) = \dfrac{a^3 + x^3}{2} - \left(\dfrac{a+x}{2}\right)^3$, де $a \geq 0$ і знайдемо її найменше значення на проміжку $[0; +\infty)$. Оскільки похідна $f'(x) = \dfrac{3}{8}(x-a)(3x+a)$ від'ємна на проміжку $[0; a)$ і додатна в інтервалі $(a; +\infty)$, то функція в першому проміжку спадає, а в другому – зростає, тобто $f(x) > f(a)$, якщо $0 < x < a$, і $f(x) > f(a)$ для $x > a$. Тому $f(a) = 0$ – найменше значення функції, а отже, $f(x) \geq 0$ для всіх $x \geq 0$. Якщо $x = b$, то маємо нерівність $f(b) \geq 0$, яка рівносильна даній в умові задачі нерівності.

3-й спосіб. У правильності нерівності легко переконатися, використовуючи мал. 60, де $c=\dfrac{a+b}{2}$.



Мал. 60



Мал. 61

3. Нехай $\angle BAC = 2\alpha$. Оскільки $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$ (мал. 61), то

$$\frac{1}{2}bc\sin 2\alpha = cl\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}bl\sin\alpha \Leftrightarrow bc\cos\alpha = \frac{b+c}{2}l \Leftrightarrow l = \frac{2bc}{b+c}\cos\alpha.$$

4. Нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{n^2+1} > \frac{1}{4}$, яка рівносильна заданій, будемо доводити способом послаблення, використовуючи очевидну нерівність $\frac{k^2}{k^2+1} > \frac{k^2-1}{k^2}$ для $k = 2, 3, \ldots, n$. Маємо

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{n^2+1} > \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} > \frac{1}{4}.$$

5. Припустимо, що (x, y, z) – розв'язок системи. Застосуємо нерівність Коші-Буняковського до лівої частини другого рівняння системи

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\cdot x^2 + 1\cdot y^2 + 2\cdot z^2 \le \sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{x^4+y^4+z^4}.$$

З урахуванням першого рівняння приходимо до суперечності $\sqrt{7} \le \sqrt{6}$. Отже, система рівнянь не має розв'язків. **6.** Нерівність будемо доводити способом послаблення лівої частини, застосовуючи при цьому нерівність Коші:

$$2^{\sin x} + 2^{tgx} \ge 2\sqrt{2^{\sin x}\cdot 2^{tgx}} = 2\sqrt{2^{\sin x + tgx}} = \sqrt{2^{\sin x + tgx + 2}} = 2^{\frac{\sin x + tgx + 2}{2}}.$$

Доведемо, що $\frac{\sin x + tgx + 2}{2} \ge x + 1$. Для цього утворимо функцію

$$y = \sin x + tgx - 2x.$$

Вона неперервна на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, а її похідна в інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, додатна:

$$y' = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \ge 2\sqrt{\cos x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} - 2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}} - 1\right) > 0.$$

Тому функція зростає і $y(x) > y(0)$. Оскільки $y(0) = 0$, то

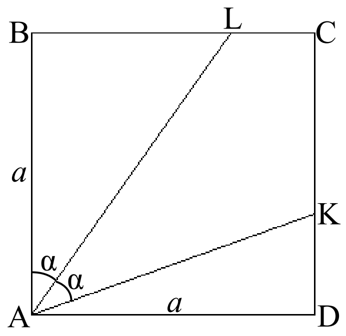
$$\sin x + tgx - 2x > 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x + tgx + 2}{2} \geq x + 1.$$

За властивістю транзитивності нерівностей маємо $2^{\sin x} + 2^{tgx} > 2^{x+1}$, що й треба було довести. **7.** Нехай a – сторона квадрата, α – кут BAL. Тоді $\angle DAK = 90° - 2\alpha$ (мал. 62). Оскільки $AK = \frac{a}{\sin 2\alpha}, BL = atg\alpha, DK = actg2\alpha$, то рівність $BL + KD = AK$ рівносильна тригонометричній рівності

$$tg\alpha + ctg2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha},$$

яку легко довести:

$$tg\alpha + ctg2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$



Мал. 62

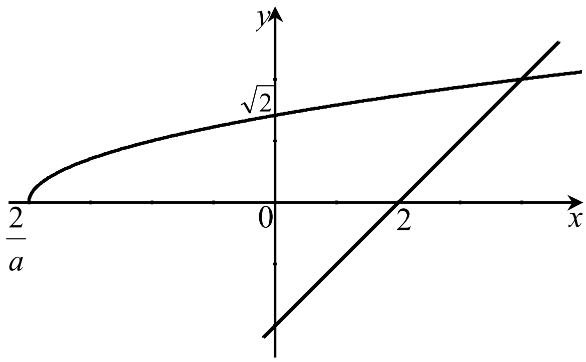
8. Виконуючи рівносильні перетворення рівняння, отримаємо

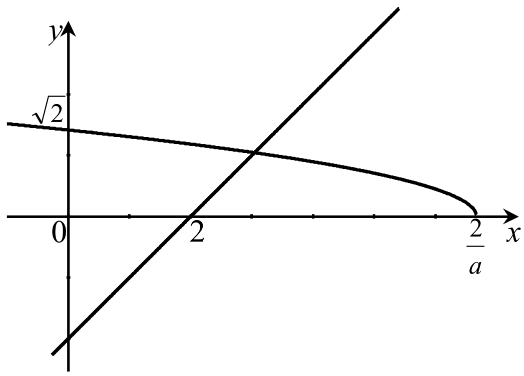
$$\frac{x\{x\} + \{x\}[x] + [x]x}{x[x]\{x\}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\{x\} + \{x\}[x] + [x]x = 0, \\ x[x]\{x\} \neq 0. \end{cases}$$

Оскільки $\{x\} = x - [x]$, то з рівняння системи маємо квадратне рівняння відносно змінної x: $x^2 + [x]x - [x]^2 = 0$. Тому, беручи до уваги, що $[x]x \geq 0$, знаходимо $x = \frac{(\sqrt{5}-1)[x]}{2}$. Розв'язування цього рівняння зводиться до розв'язування мішаної системи з цілим параметром k:

$$\begin{cases} k < x < k+1, \\ x = \frac{(\sqrt{5}-1)k}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \frac{(\sqrt{5}-1)k}{2} < k+1, \\ x = \frac{(\sqrt{5}-1)k}{2}. \end{cases}$$

Подвійна нерівність системи має два цілі розв'язки $k = -2$ і $k = -1$, для яких знаходимо $x = 1 - \sqrt{5}$ і $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **9.** Якщо $a = 0$, то рівняння має єдиний розв'язок $2 + \sqrt{2}$. В інших випадках задачу розв'язуватимемо графічно. Для цього побудуємо графіки функцій $y = x - 2$ і $y = \sqrt{2 - ax}$. Якщо $a < 0$, то графіки мають єдину спільну точку (мал. 63 *а*). У випадку, коли $a > 0$, графіки матимуть спільну точку тільки тоді, коли $a \le 1$ (мал. 63 *б*). *Відповідь:* $a \le 1$.



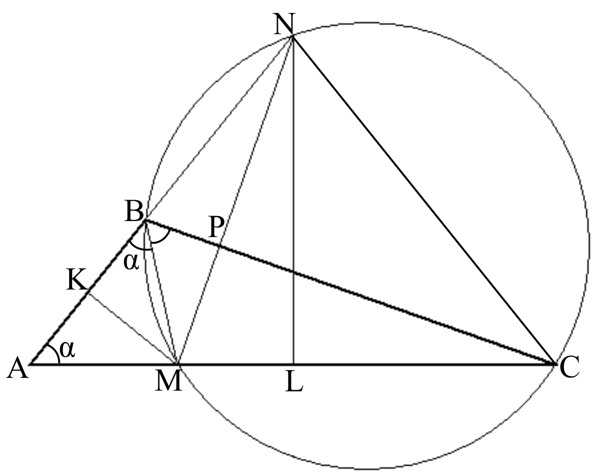


Мал. 63

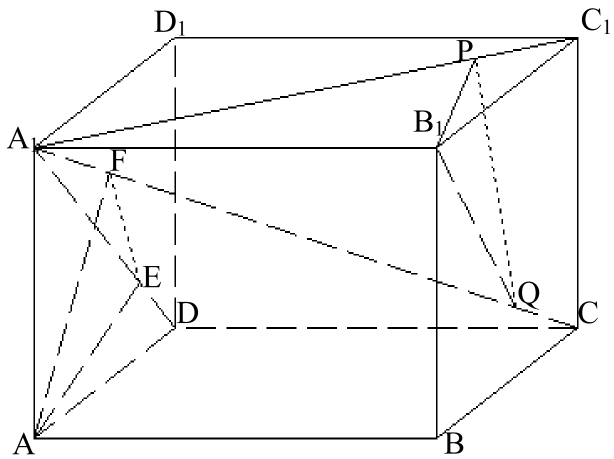
10. Нехай $\angle BAC = \alpha$. Тоді $\angle BAC = \angle ACN = \angle ABM = \alpha$, а $\angle MBN = =180^\circ - \alpha$ (мал. 64). У чотирикутнику $MBNC$ сума протилежних кутів дорівнює 180°, а тому навколо нього можна описати коло. Вписані кути BNM і BCM рівні, бо стягуються однією дугою. Використовуючи теорему синусів і рівність $BC = MN$, маємо

$$\frac{\sin\angle BMC}{BC} = \frac{\sin\angle BCM}{BM} = \frac{\sin\angle BNM}{BM} = \frac{\sin\angle MBN}{MN} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle BMC = \sin\angle MBN \Rightarrow \angle BMC = \angle MBN \Rightarrow \angle AMB = \angle ABM = \alpha \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$



Мал. 64



Мал. 65

Нескладно переконатися, що чотирикутник $MBNC$ – рівнобічна трапеція, а BPM і CPN – рівнобедрені прямокутні трикутники. Тому $\angle PCN =$ $= \angle PBM = 45^\circ$, а отже, $\angle ACB = 15^\circ$, $\angle ABC = 105^\circ$. *Відповідь:* $15^\circ, 60^\circ, 105^\circ$.

11. Рівність доведемо, виконуючи такі перетворення:

$$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=$$
$$=\cos\big((x+y+z)-z\big)+\cos\big((x+y+z)-x\big)+\cos\big((x+y+z)-y\big)=$$
$$=\cos(x+y+z)\big(\cos x+\cos y+\cos z\big)+\sin(x+y+z)\big(\sin x+\sin y+\sin z\big)=$$
$$=a\cos^2(x+y+z)+a\sin^2(x+y+z)=a.$$

12. Оскільки $CD\perp(ADA_1)$, то $AE\perp CD$. Відповідно до умови задачі $AE\perp A_1D$. Тому $AE\perp(A_1DC)$. Звідси випливає, що $A_1C\perp AE$. Далі, враховуючи, що $A_1C\perp AF$, одержуємо, що $A_1C\perp(AFE)$. Таким чином, ми довели, що $EF\perp A_1C$. У площині DA_1B_1C прямі FE і B_1Q паралельні, бо обидві вони перпендикулярні до прямої A_1C. Аналогічно встановлюється паралельність прямих AF і PQ. Цим забезпечується рівність величин кутів EFA і PQB_1 (мал. 65). **13.** *Див. задачу 14 для 10-го класу*. **14.** З ланцюжка рівностей

$$f\big(xf(y)\big)+f(x)+f(y)=f(x+y)=f(y+x)=f\big(yf(x)\big)+f(y)+f(x)$$

випливає рівність $f\big(xf(y)\big)=f\big(yf(x)\big)$. Оскільки функція f набуває тільки додатних значень, то нерівність $f(x+y)>f(x)$ виконується для всіх додатних x, y і означає, що функція f зростає на множині додатних чисел. Тому отримана вище рівність виконується тільки тоді, коли

$$xf(y)=yf(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}.$$

Остання рівність, у якій ліва частина залежить від x, а права частина – від y може виконуватися за умови, що $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}=c$, де $c>0$ – деяка постійна величина. Таким чином, якщо f шукана функція, то $f(x)=cx$. Перевіримо, чи задовольняє ця функція задану в умові задачі рівність, чи ні. Оскільки

$$f\big(xf(y)\big)+f(x)+f(y)=f(xcy)+cx+cy=c^2xy+cx+cy,$$
$$f(x+y)=c(x+y)=cx+cy,$$

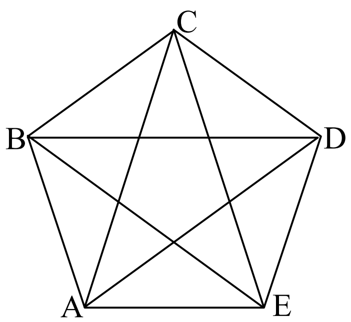
то рівність виконуватися не може, бо $c^2xy>0$. Отже, не існує функцій, які б задовольняли всі умови задачі. **15.** *Див. задачу 15 для 10-го класу*.

2004 – 2005 навчальний рік

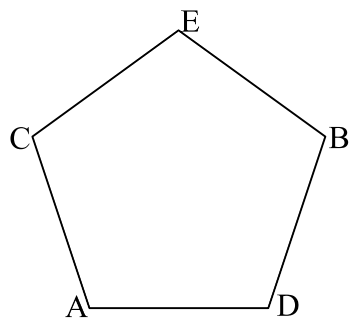
VII КЛАС

1. Побудуємо на площині рівносторонній трикутник, довжина сторони якого дорівнює 1. Щонайменше дві вершини цього трикутника матимуть однаковий колір. Сторона трикутника, яка з'єднує його вершини однакового кольору, є шуканим відрізком. **2**. Через вершину заданого кута проведемо перпендикуляр до однієї з його сторін. Цей перпендикуляр з іншою стороною трикутника утворить кут, міра якого дорівнює $1°$. Далі будуємо кут, міра якого

$13°$, і ділимо заданий кут на 7 рівних частин. **3**. Оскільки $14^5 = (2 \cdot 7)^5 = 4 \cdot 2^3 \cdot 7^5$, то число 14^5 ділиться на 4 без остачі, тобто остача дорівнює нулю. **4**. Якщо квадрат розрізати на три прямокутники, розміри яких $3{,}5 \times 4$, $0{,}5 \times 2$ і $0{,}5 \times 2$, то сума периметрів цих прямокутників буде 25. **5**. *Ні, такого не може бути*. Якщо, наприклад, на першому кущі число ягід парне, то на другому кущі число ягід непарне, на третьому – парне і на четвертому – непарне. Сума всіх цих чисел є числом парним. **6**. Припустимо, що це можна зробити. Тоді кількість доріг, що з'єднують кожне місто з трьома іншими, повинна дорівнювати дробовому числу $\frac{5 \cdot 3}{2}$. Отримана суперечність установлює хибність припущення. **7**. Опівночі стрілки годинника збігаються. Якщо в цей момент примусити годинник іти назад, то стрілки показуватимуть час минулого дня, а їхнє симетричне відображення відносно вертикалі «12–6» – час наступної доби. При цьому несприятливому часу вчорашнього дня відповідатиме сприятливий час сьогодення і навпаки. Тому сприятливого часу сьогодні буде стільки ж, скільки несприятливого було вчора, а отже, сприятливого і несприятливого часу протягом доби порівну.



Мал. 66



Мал. 67

8. Маршрутом руху фішок є п'ятикутна зірка, утворена діагоналями п'ятикутника. Нехай A, B, C, D, E – вершини зірки (мал. 66). З вершини A фішку можна перемістити у вершини C або D, з вершини B – у вершини D або E і т. д. Таке переміщення фішок по сторонах зірки рівносильне переміщенню по сторонах п'ятикутника $ACEBD$ (мал. 67). Зрозуміло, що поміняти місцями дві фішки так, щоб третя залишилася на своєму місці, не можна. **9**. Після кожного ходу хлопчика в коробках залишатиметься парна кількість цукерок. Якщо хлопчик кожного разу братиме цукерку з коробки, де міститься найменша кількість цукерок, то завжди в якійсь коробці буде не менше двох цукерок. Тому останні дві цукерки обов'язково будуть в одній коробці. **10**. Нехай α – величина кута BAC, a – довжина сторони BC, D – точка сторони AC така, що $BD = a$. Тоді $\angle BDC = 2\alpha$. З рівності

$$\angle BDC = \angle BAD + \angle ABD$$

маємо $\angle ABD = \alpha$. Тому $AD = BD = a$ і $DC = AC - AD = a$. Отже, трикутник BCD – рівносторонній, а $2\alpha = 60°$. Таким чином, трикутник має кути $30°, 60°$ і

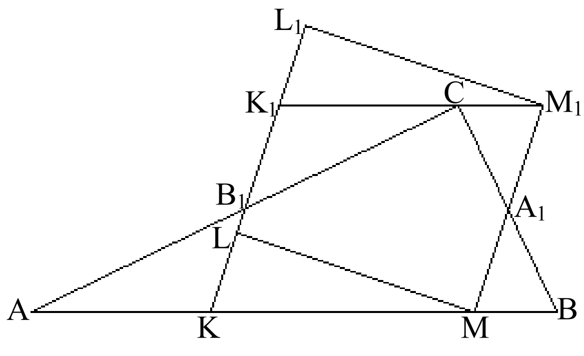
90°. **11.** Якщо у виразі непарна кількість знаків «–», то спочатку треба замінити всі знаки «+» на «–», а потім утворити вираз, кратний 7:

$$1*2*3*4*5*6 \to 1-2-3-4-5-6 \to 1+2-3+4-5-6=-7.$$

В іншому разі, замінивши знаки «–» на «+», матимемо $1+2+3+4+5+6=21$. **12.** Серед множників добутку є 401 множники, які кратні 5, 80 – кратні 25, 16 – кратні 125 і 3 – кратні 625. Тому число, що дорівнює заданому добутку, закінчується 500 нулями. **13.** Ні, не може. Запишемо суму квадратів 9 послідовних натуральних чисел так:

$$(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2=$$
$$=9n^2+60.$$

Оскільки вираз $9n^2+60$ ділиться на 3, а на 9 не ділиться, то він не може бути квадратом цілого числа. **14.** *Ні, не може*. Сума всіх заданих чисел є непарним числом і після кожного кроку залишається непарною. Тому число, що залишиться, також буде непарним, а отже, не дорівнюватиме 10^{2005}. **15.** Побудуємо 9 прямих $x=1, x=2, ..., x=9$ і на кожній з них відмітимо точки з ординатами $y=1, y=2, y=3$. Нескладно підрахувати, що розфарбувати три точки в два кольори можна 8 способами. Тому принаймні на двох з 9 прямих точки матимуть однакове розфарбування. Нехай це прямі $x=n$ і $x=k$. Проміж точок $A(n;1), A(n;2), A(n;3)$ щонайменше 2 точки, наприклад $A(n;p)$ і $A(n;q)$, матимуть однаковий колір. Тоді прямокутник з вершинами $A(n;p), A(n;q), A(k;q), A(k;p)$ – шуканий. **16.** Відстань до табору від пункту маршруту, де штурман згадав про компас, складає п'яту частину шляху, який він пробіг за півтори години, доганяючи групу. Тому відстань до табору штурман подолав за $90/5$ хв. Отже, до табору штурман повернувся о 12 год 48 хв. **17.** Нехай A_1 – середина катета BC, B_1 – середина катета AC, x – довжина сторони шуканого квадрата, Проведемо через точки A_1 і B_1 паралельні прямі a та b так, щоб відстань між ними дорівнювала x. Вони перетнуть гіпотенузу трикутника в точках M і K відповідно. Повернувши трикутники AKB_1 і BMA_1 на 180° навколо вершин B_1 і A_1 відповідно, утворимо паралелограм MKK_1M_1 (мал. 68). Якщо прямокутний трикутник KLM змістити в положення $K_1L_1M_1$, то отримаємо чотирикутник MLL_1M_1, який і буде шуканим квадратом.



Мал. 68

Примітка. 1. Щоб знайти сторону шуканого квадрата, треба на продовженні катета AC відкласти точку D так, щоб $CD = CA_1$, і на відрізку AD як на діаметрі побудувати коло, яке перетне катет BC в точці P. Оскільки $CP^2 = \frac{1}{2} AC \cdot CB$, то CP – сторона шуканого квадрата: $CP = x$. 2. Для побудови точки, через яку повинна проходити пряма a, потрібно провести коло радіуса x з центром в точці B_1 і побудувати коло, діаметром якого є відрізок A_1B_1. Одна з точок перетину кіл дозволить провести пряму a.

VIII КЛАС

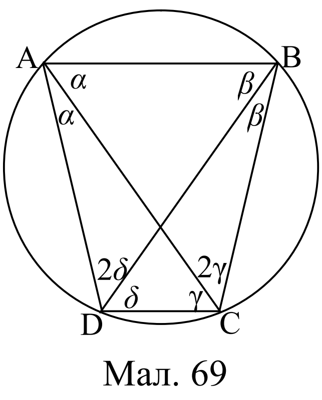
1. Це число треба шукати серед чисел вигляду $n \cdot \text{ÍÑÊ}\ (3, 4, 5, 8) + 1$, де n – натуральне число. Оскільки $HCK(3, 4, 5, 8) = 120$ а 121 – складене число, то шукане число – 241. **2.** *а*) Нехай n – кількість спусків, а p – кількість підйомів, які треба зробити, щоб з'їхати на перший поверх. Тоді маємо рівняння:

$$11n - 8p = 19 \Leftrightarrow n = 2 + p - \frac{3(p+1)}{11} \Rightarrow p = 10, n = 9.$$

Таким чином, опускаючись 9 і піднімаючись 10 разів, можна дістатися першого поверху. *б*) Для того, щоб піднятися з першого на k-й поверх, потрібно зробити p підйомів і n спусків. Числа p і n визначаються з рівняння:

$$8p - 11n = k - 1 \Leftrightarrow n = p - \frac{3p + (k-1)}{11}$$

і дорівнюють: $7(k-1)$ і $5(k-1)$ відповідно. **3.** Вписані кути DAC і DBC (мал. 69) рівні, бо стягуються спільною дугою DC. Тому $\alpha = \beta$. Аналогічно встановлюється, що $\gamma = \delta$. З рівностей $\angle ABD = \angle ACD, \angle CBD = \angle CAD$ випливають рівності $\beta = \gamma$ і $\alpha = \delta$. Оскільки $2\alpha + 2\beta + 3\gamma + 3\delta = 2\pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{5}$, а $\angle A = \angle B = \frac{2\pi}{5}$, $\angle C = \angle D = \frac{3\pi}{5}$. Якщо $\angle BDC = 2\delta, \angle ACD = 2\gamma$, а $\angle ADB = \delta, \angle ACB = \gamma$, то подібними міркуваннями знаходимо: $\angle A = \angle B = \frac{4\pi}{7}$, $\angle C = \angle D = \frac{3\pi}{7}$.



Мал. 69

4. Нехай x – ширина річки. Тоді відношення відстаней, пройдених поромами до першої зустрічі, буде $(x-720):720$. До другої зустрічі воно складатиме $(2x-400):(x+400)$. З рівності цих відношень знаходимо $x=1760$. Отже, ширина річки 1760 м. **5.** Після розкладу числа 1872 на прості множники матимемо $1872=2^4\cdot 3^2\cdot 13$. Зрозуміло, що 13 – вік одного учня. З другої умови задачі знаходимо вік наймолодшого учня, йому 8 років, а найстаршому – 18.
6. *12 хв.* Уведемо позначення: a – початковий об′єм озерця, x – об′єм води, що випиває за одну хвилину один слон, y – потужність джерела, t – шуканий час (у хвилинах). Тоді отримаємо таку систему рівнянь:

$$6xt=a+yt, 48x=a+4y. 54x=a+6y,$$

з якої знаходимо *t.* 12 хв. **7.** Нехай точка O міститься усередині кругів $K_1,...,K_6$, центрами яких є точки $O_1,...,O_6$. Якщо в трикутнику O_1OO_2 кут O_1OO_2 менший за $60°$, то один з інших кутів цього трикутника обов'язково більший за $60°$. Вважатимемо, що $\angle O_1\le\angle O_2$ і $\angle O_2>60°$. Тоді $OO_1\ge OO_2$ і $OO_2>O_1O_2$, а отже, точка O_2 міститься усередині круга K_1. Аналогічно досліджується випадок, коли $\angle O_1OO_2=60°$. Припустимо що жоден з центрів $O_1,...,O_6$ не міститься усередині інших кіл. Тоді кожен з кутів $O_1OO_2,...,O_5OO_6,O_6OO_1$ повинен бути більшим за $60°$, а їхня сума більша за $360°$, що суперечить величині повного кута. Тому принаймні один з центрів міститься усередині іншого круга. **8.** Нескладно підрахувати, що для всіх двоцифрових чисел сума цифр непарних чисел більша на 45 за суму цифр парних чисел. Для чисел 1, 2, …, 9 і 100 така різниця дорівнює 4. Тому сума цифр, які використовуються для запису непарних чисел, на 49 більша за суму цифр, що використовуються для запису парних чисел. **9.** Рівняння не має розв'язків на множині цілих чисел, бо ліва частина рівняння при будь-яких цілих x і y є парним числом, а права – число непарне. **10**. *1-й спосіб.* Помістимо трикутник у декартову систему координат так, щоб основа містилася на осі абсцис, а висота на осі ординат (мал. 70). Якщо основа трикутника дорівнює $2a$, а висота h, то вершини трикутника матимуть такі координати: $A(0;h), B(-a;0), C(a;0)$. Нехай n і m – координати точки E, $\angle EOC=\alpha$. Тоді з трикутників AOC, OKE, AEO і CEO маємо:

$$tg\alpha=\frac{a}{h}=\frac{m}{n}\Rightarrow m=\frac{an}{h},$$

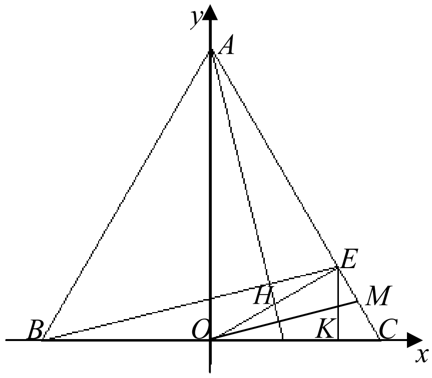
$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{h},\cos\alpha=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{a}\Rightarrow\frac{m^2+n^2}{h^2}+\frac{m^2+n^2}{a^2}=1.$$

Далі знаходимо $n=\dfrac{ah^2}{a^2+h^2}, m=\dfrac{a^2h}{a^2+h^2}$. Точка H – середина відрізка OE, тому вона має координати $\dfrac{n}{2},\dfrac{m}{2}$. Складемо рівняння прямих BE та AH і знайдемо їхні кутові коефіцієнти k_B та k_A:

$$\frac{y}{x+a}=\frac{m}{n+a}\quad\Rightarrow\quad k_B=\frac{ah}{a^2+2h^2};$$

$$(y-h):\frac{m}{2}=x:\frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad k_A=-\frac{a^2+2h^2}{ah}.$$

Оскільки $k_B k_A=-1$, то прямі BE та AH перпендикулярні.



Мал. 70

2-й спосіб. Нехай M – середина відрізка EC. Тоді прямі OM і BE паралельні. З подібності трикутників AEO і OEC, враховуючи, що AH і OM їхні медіани, випливає подібність трикутників AHE і OME. Оскільки $\angle MHO+\angle OMA=$ $=\angle OMA+\angle EOM=90°$, то $AH\perp OM$, а отже, $AN\perp BE$.

3-й спосіб. Утворимо вектори $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BE}$ і доведемо, що їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Для цього введемо ортогональні вектори $\overrightarrow{EH}=\vec{x}$, $\overrightarrow{EC}=\vec{y}$. Тоді:

$$\overrightarrow{EO}=2\vec{x}, \quad \overrightarrow{CO}=2\vec{x}-\vec{y}, \quad \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CO}=2\left(\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{EC}\right)=4\vec{x}-2\vec{y},$$
$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}=4\vec{x}-\vec{y}, \quad \overrightarrow{BE}=\vec{y}-4\vec{x}.$$

З подібності трикутників OEC і AOC маємо:

$$\frac{AC}{CO}=\frac{CO}{EC}\Rightarrow AC=\left(\frac{CO}{EC}\right)^2 EC\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{CO}^2}{b^2}\vec{y}=\frac{4x^2+y^2}{y^2}\vec{y},$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC}=\frac{4x^2+y^2}{y^2}\vec{y}-\vec{y}=\frac{4x^2}{y^2}\vec{y},$$

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\frac{4x^2}{y^2}\vec{y}-\vec{x}.$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AH}$ і $\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\frac{4x^2}{y^2}\vec{y}-\vec{x}\right)\left(\vec{y}-4\vec{x}\right)=\frac{4x^2}{y^2}y^2-\frac{16x^2}{y^2}\vec{y}\cdot\vec{x}-\vec{x}\cdot\vec{y}-4y^2=0.$$

Отже, $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BE}$. **11.** Розкладемо на множники ліву частину рівняння так, щоб його права частина була цілим числом: $(3x-13)(3y+10)=-25$. Оскільки

$$-25=(-1)\cdot 25=(-5)\cdot 5=(-25)\cdot 1=1\cdot(-25)=5\cdot(-5)=25\cdot(-1),$$

то, порівнюючи множники лівої і правої частин рівняння, отримаємо сукупність шести систем лінійних рівнянь, з яких знайдемо шукані пари чисел: $-4;-3$, $6;-5$, $4;5$. **12.** Для кожного n виконується рівність

$$(n-1)n(n+1)(n+2)=(n^3-n)(n+2)=n^4+2n^3-n^2-2n=\left(n^2+n-1\right)^2-1.$$

Тому сума добутку чотирьох послідовних чисел 2005, 2006, 2007, 2008 і 1 є квадратом натурального числа. **13.** Перенісши все ліворуч і розклавши на множники, рівність можна записати в рівносильній формі:

$$\left(\left(|x|-2\right)^2+\left(|y|-2\right)^2-1\right)\left(|x|+|y|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|+|y|=0, \\ \left(|x|-2\right)^2+\left(|y|-2\right)^2=1. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності задає точку, що є початком системи координат, а друге – чотири кола координатної площини. Якщо $x>0, y>0$, то з другого рівняння системи отримуємо рівняння кола $(x-2)^2+(y-2)^2=1$, що міститься в першому координатному куті; інші три кола є його симетричними образами відносно координатних осей і початку координат. **14.** $\frac{6}{5}$.

$$\begin{cases} \dfrac{z}{x+y}+1=\dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{z}{x+y}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{z}{x+2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x(x+y)}{y}, \\ z=\dfrac{(x+y)(x+2y)}{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y, \\ z=6y \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{2x+y}=\frac{6}{5}.$$

15. Сума $1+2+3+...+2005$ є непарним числом. Після виконання кожної вказаної операції сума написаних чисел змінюється на величину $\Delta=(m+k)-(m^3-k^3)=(k^3+k)-(m^3-m)$. Оскільки Δ є парним числом, то сума залишається непарною, а отже, число 10^{3010} залишитися не може. **16.** Зрозуміло, що шість учнів розв’язали 31 задачу. Якби кожний з них розв’язав менше 6 задач, то разом вони б розв’язали щонайбільше 30 задач. Тому серед них є учень, що розв’язав більше п’яти задач. **17.** Позначимо через K, L, M, N точки дотику сторін чотирикутника з колом. З очевидних рівностей

$$\angle KOA=\angle AOL=\angle MOC=\angle CON, \angle KOD=\angle DON=\angle BOL=\angle BOM.$$

отримуємо: $\angle AOD=\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=90°$. За теоремою Піфагора маємо: $|AD|=|AB|=|CD|=|DC|=\sqrt{5}$. Отже, периметр чотирикутника дорівнює $4\sqrt{5}$.

IX КЛАС

1. Нехай $p^4<n<(p+1)^4$, де p – натуральне число. Тоді $p<\sqrt[4]{n}<p+1$, а тому $[\sqrt[4]{n}]=p$, $\{\sqrt[4]{n}\}=\sqrt[4]{n}-p>0$ і

$$\{\sqrt[4]{n}\}>\frac{1}{4\sqrt[4]{n^3}} \Leftrightarrow 4n-4\sqrt[4]{n^3}p>1.$$

Враховуючи, що $\left(\sqrt[4]{n}-p\right)^4=n-4\sqrt[4]{n^3}p+6\sqrt[4]{n^2}p^2-4\sqrt[4]{n}p^3+p^4$, перетворимо ліву частину останньої нерівності:

$$\begin{aligned} 4n-4\sqrt[4]{n^3}p &= \left(\sqrt[4]{n}-p\right)^4-6\sqrt[4]{n^2}p^2+4\sqrt[4]{n}p^3-p^4+3n= \\ &= \left(n-p^4\right)+\left(\sqrt[4]{n}-p\right)^4+2n-6\sqrt[4]{n^2}p^2+4\sqrt[4]{n}p^3= \\ &= \left(n-p^4\right)+\left(\sqrt[4]{n}-p\right)^4+2\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{n}-p\right)^2\left(\sqrt[4]{n}+2p\right)>n-p^4\geq 1. \end{aligned}$$

Нерівність доведено. **2.** *Ні, не можна* .Припустимо, що такий степінь існує:

$$m+(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+n)=2^k.$$

Оскільки $m+(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+n)=\dfrac{(2m+n)(n+1)}{2}$, то

$$\frac{(2m+n)(n+1)}{2}=2^k \Leftrightarrow (2m+n)(n+1)=2^{k+1}.$$

Остання рівність виконуватися не може, бо її ліва частина при будь-якому n є непарним числом. **3.** Нехай α і β – корені рівняння. Тоді приходимо до такої мішаної системи рівнянь і нерівностей:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=7,\\ \alpha\beta=\dfrac{k}{4},\\ \alpha^2+\beta^2=22{,}5,\\ 196-4k\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=53,\\ k\le 49.\end{cases}$$

Отже, задача розв'язків не має. **4.** *1-й спосіб.* Навколо чотирикутника $BKDH$ можна описати коло ω, діаметром якого буде відрізок BD. У це коло буде вписаний і трикутник BKH. Тому

$$\frac{KH}{\sin\beta}=BD \quad\Leftrightarrow\quad \sin\beta=\frac{a}{b},$$

де $\beta=\angle KBH, a=KH, b=BD$ – діаметр кола. Нехай KM і HN – висоти трикутника BKH, P – точка перетину висот. Навколо чотирикутника $BMPN$ також можна описати коло ω_1. Його діаметром буде відрізок BP. Коло ω_1 буде описане навколо трикутника BMN. Тому $\dfrac{MN}{\sin\beta}=BP.$ Оскільки $\angle KMH=\angle KNH=90°,$ то точки M і N лежать на колі ω_2, діаметром якого є відрізок KH, а центром – точка Q. Враховуючи співвідношення між вписаними і центральними кутами, що стягуються однією дугою, маємо:

$$\angle KQM=2\angle KHM, \angle HQN=2\angle HKM.$$

Далі знаходимо кут NQM :

$$\angle NQM=\angle KQM+\angle NQH-180°=2\big(\angle KHM+\angle HKM\big)-180°=$$
$$=2\big(180°-\angle KBH\big)-180°=180°-2\beta.$$

З рівнобічного трикутника NQM дістаємо

$$MN=2QM\sin\frac{\angle NQM}{2}=a\sin\big(90°-\beta\big)=a\cos\beta.$$

Тому

$$BP=\frac{a\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{a\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta}=\sqrt{b^2-a^2}.$$

2-й спосіб. Візьмемо на BC точку N так, щоб $BN=PH$. $BNHP$ – паралелограм, тому $BP=NH$. Оскільки $KP\perp BH, BH\perp CD,$ то $KP\parallel DH$. Отже, $PHDK$ – паралелограм, тому $PH=KD$. Також $BN=KD, BK\perp KD$, тому $BNDK$ – прямокутник. Звідси отримуємо $NK = BD = b.$ Оскільки $NH \parallel BP,\ BP \perp KH$, то $NH \perp KH$. Тому $NH = \sqrt{NK^2 - KH^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$.

5. Такі повідомлення могли належати тільки мешканцю вулиці V, тому пожежникам треба було їхати на вулицю T. **6.** Нехай a – шукане число. Тоді a^2 закінчується цифрою 4. Таких чисел три: 80884, 88084, 88804. Далі знаходимо:

$$a = \sqrt{88804} = 2\sqrt{22201} = 2\sqrt{(150-1)^2} = 2 \cdot 149 = 298.$$

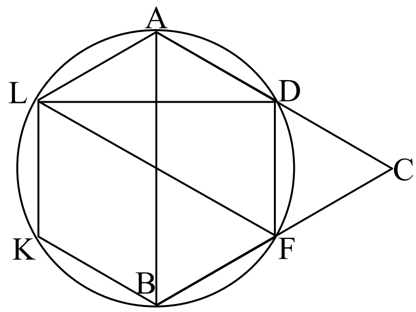
7. $4n+1$. Доведемо, що $4n+1 < \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2$. Використовуючи співвідношення між середнім геометричним і середнім арифметичним для n і $n+1$, отримаємо

$$\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1+n+(n+1) = 4n+2.$$

Застосовуючи спосіб послаблення, дістанемо

$$\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} > 2n+1+2n = 4n+1.$$

8. Побудуємо рівносторонній трикутник ABC, довжини сторін якого дорівнюють 2. Щонайменше дві його вершини матимуть однаковий колір. Нехай A і B – білі. В коло, діаметром якого є відрізок AB, впишемо правильний шестикутник $ADFBKL$ (мал. 71). Якщо проміж вершин D, F, K, L є хоч одна біла, наприклад D, то трикутник ADB – шуканий. В іншому разі шуканими будуть трикутниками DFL, DKL, DFK, FKL.



Мал. 71

9. Виконаємо тотожні перетворення виразу, враховуючи рівність коефіцієнтів, рівновіддалених від його початку і кінця

$$\frac{a_{-n}}{1+2^n} + \frac{a_{-n+1}}{2+2^n} + \ldots + \frac{a_0}{2^n+2^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^{2n-1}+2^n} + \frac{a_n}{2^{2n}+2^n} =$$

$$= a_n\left(\frac{1}{1+2^n} + \frac{1}{2^n(1+2^n)}\right) + a_{n-1}\left(\frac{1}{2+2^n} + \frac{1}{2^{n-1}(2+2^n)}\right) + \ldots + \frac{a_0}{2 \cdot 2^n} =$$

$$= \frac{a_n}{2^n} + \frac{a_{n-1}}{2^n} + \ldots + \frac{a_0}{2 \cdot 2^n} = \frac{2a_n + 2a_{n-1} + \ldots + a_0}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

10. Оскільки $x^2 + 2y^2$ ділиться на 3, то з рівності $x^2 - y^2 = (x^2 + 2y^2) - 3y^2$ випливає, що або $x - y$, або $x + y$ ділиться на 3. Нехай $x - y$ ділиться на 3. Тоді для $x = u + 2v,\ y = u - v$ маємо: $3a = x^2 + 2y^2 = 3u^2 + 6v^2 \Leftrightarrow a = u^2 + 2v^2$, де

$v=\dfrac{x-y}{3}, u=y+\dfrac{x-y}{3}$ – цілі числа. Якщо $x-y$ не ділиться на 3, а $x+y$ ділиться на 3, то візьмемо $x=u+2v,\ y=v-u.$ Знову отримуємо

$$3a=(u+2v)^2+2(v-u)^2=3u^2+6v^2 \Leftrightarrow a=u^2+2v^2,$$

де $u=\dfrac{x+y}{3}-y,\ v=\dfrac{x+y}{3}$ – цілі числа. **11.** Для розв'язання задачі скористаємося тотожністю $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1),$ де n – натуральне число. Оскільки

$$2005^{2004}-1=(2005-1)\left(2005^{2003}+2005^{2002}+\ldots+2005^2+2005+1\right)=$$
$$=2004\left(\left(2005^{2003}-1\right)+\left(2005^{2002}-1\right)+\ldots+\left(2005^2-1\right)+\left(2005-1\right)+2004\right),$$

то $2005^{2004}-1$ ділиться на 2004^2. **12.** Аналізуючи праву частину рівняння, приходимо до висновку, що $0\le x\le 5$. Але тоді $0\le x^3\le 125, 0\le 3x^4\le 1875$ і $0\le 3x^4+x^3+x-2005\le 0$. Тому $x=5$ – єдиний розв'язок рівняння. **13.** Рівність виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли

$$1\le 3\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right\}<2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right\}<\frac{2}{3}.$$

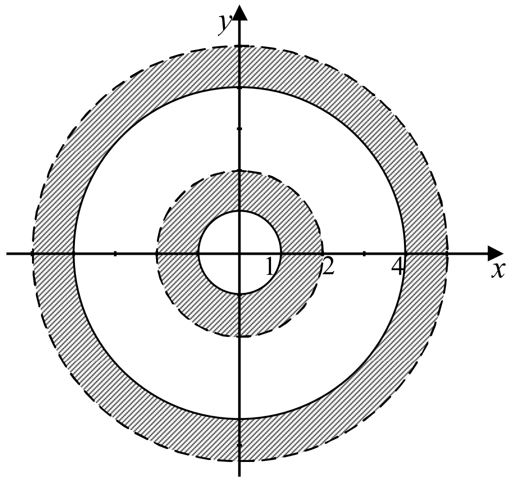
За означенням дробової частини числа маємо

$$\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right\}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}-n,$$

де $n=\left[\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right]$ – ціле невід'ємне число. Виконуючи рівносильні перетворення, отримаємо сукупність подвійних нерівностей

$$(1+3n)^2\le x^2+y^2<(2+3n)^2,\ n=0,1,\ldots,$$

що задає концентричні кільця з центром в початку координат, ширина яких дорівнює 1; внутрішнє коло належить кільцю, а зовнішнє – ні (мал. 72).



Мал. 72

14. Аналізуючи рівності $1^3+2^3=9, 1^3+2^3+3^3=36, 1^3+2^3+3^3+4^3=100,$ можна висловити припущення, що сума кубів перших n натуральних чисел є квадратом деякого натурального числа

$$1^3+2^3+...+n^3=p^2.$$

Тоді повинно існувати натуральне число q таке, що

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=q^2 \Leftrightarrow (n+1)^3=q^2-p^2 \Leftrightarrow (n+1)^3=(q-p)(q+p).$$

Утворимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} q-p=n+1, \\ q+p=(n+1)^2 \end{cases} \Rightarrow p=\frac{(n+1)n}{2}, q=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Отже, суму кубів перших n натуральних чисел можна обчислювати за формулою

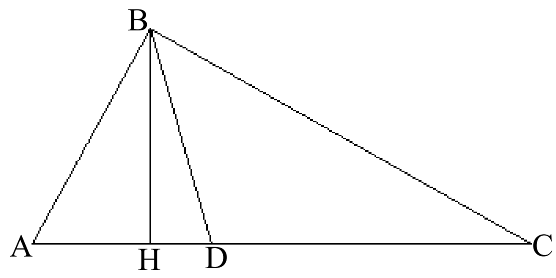
$$1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2.$$

Якщо $n=2005$, то $1^3+2^3+...+2005^3=(1003\cdot 2005)^2$. **15.** Нехай $P(x;y)$ – довільна точка координатної площини xOy, відмінна від початку координат, r – довжина відрізка OP, φ – кут між додатною піввіссю Ox і відрізком OP. Підставимо $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ у вираз і перетворимо його. Маємо

$$\frac{8xy-6x^2}{x^2+y^2}==8\cos\varphi\sin\varphi-6\cos^2\varphi=4\sin 2\varphi-3\cos 2\varphi-3=$$

$$=5\left(\frac{4}{5}\sin 2\varphi-\frac{3}{5}\cos 2\varphi\right)-3=5\sin(2\varphi-\phi)-3,$$

де $\cos\phi=\frac{4}{5}, \sin\phi=\frac{3}{5}$. Звідси дістаємо, що -8 – найменше значення виразу, а 2 – найбільше. **16.** Нехай BH – найменша висота трикутника ABC, BD – бісектриса кута B. Тоді AC – найбільша сторона і $\angle B$ – найбільший кут трикутника, $\angle A$ і $\angle C$ – його гострі кути, причому, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\angle A$ більший за $\angle C$ (мал. 73). З прямокутного трикутника BDH маємо $BH:BD=\sin\angle BDH$. Оскільки $\angle BDH=\angle C+\frac{1}{2}\angle B$ і $\angle BDH=180°-\angle A-\frac{1}{2}\angle B$, то $\angle BDH=90°-\frac{\angle A-\angle C}{2}$. Тому $BH:BD=\sin\left(90°-\frac{\angle A-\angle C}{2}\right)=\cos\frac{\angle A-\angle C}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, бо $\frac{\angle A-\angle C}{2}<45°$. Якщо $BH=h,$ а b – довжина найменшої бісектриси трикутника, то $\frac{h}{b}\geq\frac{BH}{BD}>\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Мал. 73

17. Нехай маємо числа $a, b, c, d, 2005$. Утворимо число $x = c + d - 2005$. Після виконання замін $a \to x, b \to x$ отримаємо нову п'ятірку чисел $x, x, c, d, 2005$. Виконавши замін $c \to y, d \to y$, де $y = 2005 + x - x$, матимемо числа $x, x, y, y, 2005$. Потім замінимо x на $y + 2005 - y = 2005$. Насамкінець в отриманій п'ятірці чисел $2005, 2005, y, y, 2005$, провівши заміну $y \to 2005 + 2005 - 2005$, матимемо числа 2005, 2005, 2005, 2005, 2005.

X КЛАС

1. Шуканими числами є: 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200. k-цифрове число n буде честолюбним тоді і тільки тоді, коли воно є дільником числа 10^k.

2. Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$ для обчислення площі трапеції де d_1, d_2 – довжини діагоналей, α – кут між діагоналями, і співвідношенням між середнім геометричним та середнім арифметичним для двох додатних чисел:

$$\sqrt{d_1 d_2} \le \frac{d_1 + d_2}{2} \Leftrightarrow d_1 d_2 \le \left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2.$$

Маємо

$$2 = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha \le \frac{1}{2}\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 \sin\alpha = 2\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°.$$

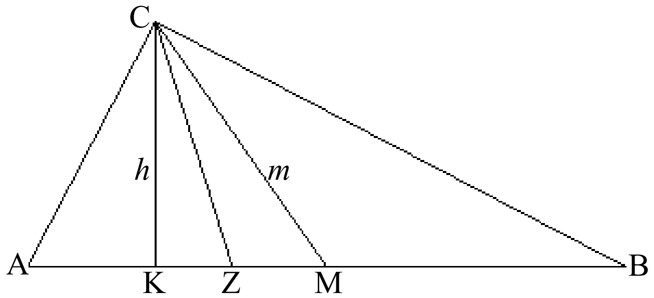
3. Припустимо, що така функція існує. Тоді рівність $f(x+1)\big(f(x)+1\big)+1=0$ повинна виконуватися на всій числовій прямій. Це може бути тільки тоді, коли перший доданок від'ємний для всіх $x \in \mathbf{R}$. При цьому в силу неперервності функції $f(x)$ жоден з множників добутку не може змінювати свій знак на всьому проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тому

$$f(x+1)\big(f(x)+1\big) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x+1) > 0, \\ f(x)+1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x+1) < 0, \\ f(x)+1 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Перша система сукупності несумісна. З другої системи випливає подвійна нерівність $-1 < f(x+1) < 0$ для всіх $x \in \mathbf{R}$. Але тоді $-1 = f(x+1)\big(f(x)+1\big) > -1$, що приводить до суперечності $-1 > -1$. Отже, неперервна функція $f(x)$ не може бути розв'язком рівняння. **4.** Нескладно переконатися, що бісектриса CZ кута ACB є бісектрисою кута MCK (мал. 74). Тому

$$\frac{MZ}{MC} = \frac{ZK}{CK} \Leftrightarrow \frac{MZ}{MC} = \frac{MK - MZ}{CK} \Rightarrow MZ = \frac{MK \cdot MC}{MC + CK}.$$

Оскільки $MK = \sqrt{m^2 - h^2}$, то $MZ = h\sqrt{\dfrac{m-h}{m+h}}$, а $CZ = h\sqrt{\dfrac{2m}{m+h}}$.



Мал. 74

5. *1-й спосіб.* Увівши підстановку $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}} > 0$, матимемо нерівність $t^3 - 3t + 2 \geq 0$, яка рівносильна очевидній нерівності $(t-1)^2(t+2) \geq 0$.

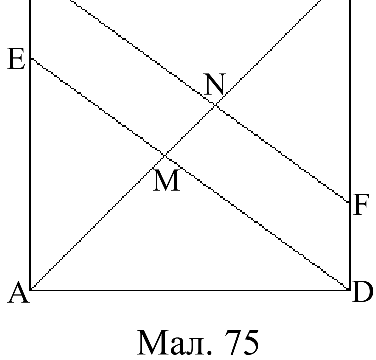
2-й спосіб. Спочатку нерівність запишемо так:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) \geq \frac{3}{2},$$

а потім до виразу, що міститься в дужках, застосуємо співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним для трьох додатних чисел.

6. Нехай a – сторона квадрата, $AE : EB = CF : FD = k$. Тоді

$$\frac{AE}{BE} + 1 = \frac{CF}{FD} + 1 = k + 1 \Leftrightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{CD}{FD} = k + 1 \Leftrightarrow BE = DF = \frac{a}{k+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow DE \parallel BF \Rightarrow \angle NBE = \angle NFC.$$



Мал. 75

Оскільки $tg\angle BFC = \frac{BC}{CF} = \frac{BC}{CD-DF} = \frac{k+1}{k}$, то $\angle NBE = arctg\frac{k+1}{k}$. За властивістю зовнішнього кута трикутника знаходимо кут EMN:

$$\angle EMN = \angle EAM + \angle AEM = 45^\circ + \angle NBE.$$

Тому

$$\angle EMN + \angle NBE = 45^\circ + 2arctg\frac{k+1}{k}.$$

7. *1-й спосіб.* Позначимо даний многочлен через $P_n(x)$. Тоді після нескладних перетворень маємо

$$P_1(x) = -\frac{x-1}{1},\ P_2(x) = P_1(x) + \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}.$$

Припустимо, що рівність $P_n(x) = (-1)^n\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}$ правильна для $n>2$. Оскільки

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (-1)^{n+1}\frac{x(x-1)...(x-n+1)(x-n)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n(n+1)} =$$

$$= (-1)^n\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n(n+1)}\left(n+1-x\right) =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)(x-n-1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n(n+1)},$$

то згідно з методом математичної індукції припущення правильне для всіх $n\in\mathbf{N}$. *2-й спосіб.* Очевидно, що числа $1, 2, ..., n-1$ є коренями многочлена. Нескладно переконатися в тому, що n також його корінь. Для цього в біномі Ньютона

$$(1+a)^n = 1 + \frac{n}{1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2 + ... + \frac{n(n-1)\cdot ...\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot (n-1)n}a^n$$

досить взяти $a=-1$:

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + ... + (-1)^n\frac{n(n-1)\cdot ...\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot (n-1)n} = 0.$$

Оскільки числа $1, 2, ..., n$ – корені, $(-1)^n\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot (n-1)n}$ – старший коефіцієнт многочлена, то многочлен можна розкласти на множники так:

$$(-1)^n\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}(x-1)(x-2)...(x-n).$$

8. Нехай a – найбільше з чисел $a_1, ..., a_n$. Тоді

$$\left(\frac{a_1+...+a_n}{n}\right)^n + \left(\frac{\max(a_1, ..., a_n)}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1+...+a_n}{n}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \ge$$

$$\ge 2\cdot\sqrt{\left(\frac{a_1+...+a_n}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\cdot\frac{a_1+...+a_n}{n}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a_1a+...+a_na}{n} \ge \frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}.$$

9. При $x=0$ з рівності $P(0) = P(0) + P(0)$ маємо $P(0)=0$, тобто вільний член многочлена дорівнює нулю. Якщо $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x$, то рівність

$$a_n(x^2+x)^n + a_{n-1}(x^2+x)^{n-1} + \ldots + a_2(x^2+x)^2 + a_1(x^2+x) =$$
$$= a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + \ldots. + a_2 x^4 + a_1 x^2 + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots. + a_2 x^2 + a_1 x$$
повинна виконуватися на множині дійсних чисел, а отже, коефіцієнти біля однакових степенів x повинні бути рівними. Оскільки
$$(x^2+x)^n = x^{2n} + nx^{2n-1} + \ldots + x^n,$$
то: або $n=1$, або $a_n = 0$. У першому випадку маємо $P(x) = a_1 x$, а в другому
$$P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots. + a_2 x^2 + a_1 x.$$
Продовжуючи аналогічні міркування, приходимо до висновку, що $P(x) = cx$, де c – довільна постійна. **10.** *На дошці залишиться число* $\frac{n-1}{n}$. Доведемо це. Оскільки $x + y - xy = 1-(1-x)(1-y)$, то пара чисел $x; y$ замінюється числом $1-(1-x)(1-y)$. Тоді трійка чисел x, y, z заміниться так:
$$x, y, z \quad \to \quad 1-(1-x)(1-y), z \quad \to$$
$$\to \quad 1-\big(1-\big(1-(1-x)(1-y)\big)\big)(1-z) = 1-(1-x)(1-y)(1-z).$$
Тому після завершення процедури заміни чисел залишиться число
$$1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$
11. Виконаємо рівносильні перетворення нерівності:
$$4 - 4\sin 2x - 12\sin x + 12\cos x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(1-\sin 2x) - 12(\sin x - \cos x) + 9 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(\sin x - \cos x)^2 - 12(\sin x - \cos x) + 9 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(2(\sin x - \cos x) - 3\big)^2 \ge 0.$$
12. Утворимо вектори $\overline{a} = (\overline{x-2; y-2})$, $\overline{b} = (\overline{6-x; 5-y})$ і знайдемо їхню суму: $\overline{a} + \overline{b} = (\overline{4; 3})$. Тоді $5 = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2} = |\overline{a}| + |\overline{b}| \le |\overline{a+b}| = 5.$

Тому повинна виконуватися рівність $|\overline{a}| + |\overline{b}| = |\overline{a+b}|$, яка можлива тільки за умови, що вектори мають однаковий напрямок. Умовою співнапрямленості векторів є рівність відношень відповідних координат:
$$\frac{x-2}{6-x} = \frac{y-2}{5-y}.$$
До того ж ці відношення повинні бути додатними:
$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{6-x} > 0, \\ \dfrac{y-2}{5-y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6, \\ 2 < y < 5. \end{cases}.$$
Розв’язуючи систему рівнянь
$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{6-x} = \dfrac{y-2}{5-y}, \\ 3xy - 6x = 10 \end{cases}$$

і враховуючи встановлені обмеження, знаходимо єдиний розв'язок системи $x=\frac{10}{3}$, $y=3$. **13.** Нескладно переконатися, що складена функція $f(f(x))$ зростає, якщо $f(x)$ – монотонна. Дослідимо монотонність функції $g(x)=2005-x-x^2-x^3$. Нехай $x_1<x_2$. Тоді

$$g(x_2)-g(x_1)=x_1+x_1^2+x_1^3-x_2-x_2^2-x_2^3=(x_1-x_2)(1+x_1+x_2+x_1^2+x_1x_2+x_1^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_1-x_2)((x_1+x_2)^2+(x_1+1)^2+(x_2+1)^2)<0 \Rightarrow g(x_2)<g(x_1).$$

Отже, функція $g(x)$ – спадна. Оскільки ліва частина рівняння є зростаючою функцією, а права – спадною, то розв'язком рівняння не може бути монотонна функція. **14.** Припустимо, що функція періодична з періодом $T\neq 0$. Тоді рівність $f(x+T)=f(x)$ повинна виконуватися для всіх $x\in\mathbf{R}$, у тому числі й для $x=0$:

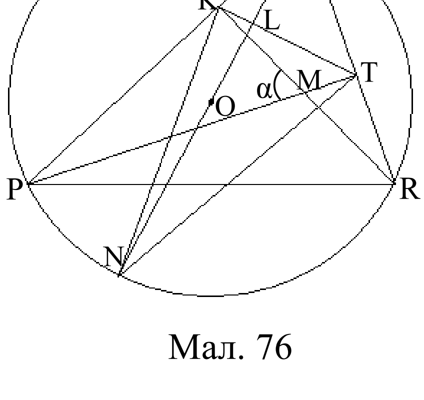
$$f(T)=f(0)\Leftrightarrow \sin((\cos\sqrt{5}T)(\cos\sqrt{401}T))=\sin 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos\sqrt{5}T)(\cos\sqrt{401}T)=(-1)^n+\pi n,\, n\in\mathbf{Z}.$$

Остання рівність не може виконуватися, якщо $n\neq 0$. Тому розглянемо рівність

$$(\cos\sqrt{5}T)(\cos\sqrt{401}T)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\sqrt{5}T=1,\\ \cos\sqrt{401}T=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\sqrt{5}T=-1,\\ \cos\sqrt{401}T=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Перша система одержаної сукупності має тільки нульовий розв'язок, а друга – несумісна. Тому функція не є періодичною. **15.** Дівчинка виграє, якщо після кожного ходу хлопчика фарбуватиме клітинки, симетричні щойно зафарбованим хлопчиком клітинкам відносно точки перетину діагоналей таблиці. **16.** Якщо діагоналі чотирикутника $NKQT$ взаємно перпендикулярні, то його площу S можна обчислити за формулою $S=\frac{1}{2}NQ\cdot KT$. Тому знайдемо довжину діагоналей чотирикутника і доведемо, що вони взаємно перпендикулярні. Нехай (мал. 76) точка O – центр описаного кола, M – точка перетину висот трикутника, L – точка перетину діагоналей чотирикутника.



Мал. 76

У прямокутних трикутниках PTQ і PKM кут KPM спільний. Тому $\angle PQT = \angle PMK = \alpha$, а $QN = \frac{a}{\sin\alpha}$. З трикутників PTQ і RKQ маємо

$$\frac{QT}{PQ} = \cos\alpha = \frac{KQ}{QR} \Rightarrow \frac{QT}{PQ} = \frac{KQ}{QR} \Leftrightarrow \frac{QT}{QK} = \frac{QP}{QR}.$$

За другою ознакою подібності трикутники RQP і KQT подібні з коефіцієнтом подібності $\cos\alpha$. Тому $KT = a\cos\alpha$. Трикутники NRQ і QLT подібні, бо мають спільний кут LQT, а $\angle RNQ = \angle RPQ = \angle QTK$. Тому $\angle QLT = \angle QRN = 90°$. Отже, $S = \frac{a^2 ctg\alpha}{2}$ – площа чотирикутника $QKNT$. **17.** Нехай a, b, c – сторони, p – півпериметр, S – площа трикутника. Відомо, що $R = \frac{abc}{4S}, r = \frac{S}{p}, S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Тоді

$$\frac{R}{2r} = \frac{abcp}{8S^2} = \frac{abc}{8(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Уведемо змінні x, y, z:

$$\begin{cases} x = b+c-a > 0, \\ y = a+c-b > 0, \\ z = a+b-c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}, \\ b = \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}, \\ c = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}. \end{cases}$$

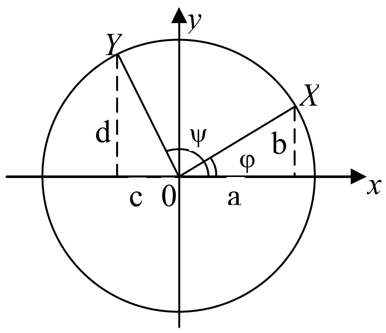
Маємо

$$\frac{R}{2r} = \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z+x}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{xyz} \geq \frac{\sqrt{yz}\sqrt{zx}\sqrt{xy}}{xyz} = 1 \Rightarrow R \geq 2r.$$

XI КЛАС

1. Візьмемо на колі одиничного радіуса з центром у початку координат (мал. 77) дві довільні точки $X(a;b)$ і $Y(c;d)$. Позначимо через φ і ϕ кути, що утворюють радіуси OX і OY з віссю Ox. Тоді $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi, c = \cos\phi, d = \sin\phi$. Далі маємо

$$ac + bd = \cos\varphi\cos\phi + \sin\varphi\sin\phi = \cos(\varphi - \phi) \leq 1.$$



Мал. 77

2. *Так, існує*. Побудуємо многогранник $OABCO'$ так, щоб усі його ребра дорівнювали 1. Кожна його вершина має один з чотирьох кольорів. Якщо точки O і O' різного кольору, то або проміж точок A, B, C принаймні дві матимуть однаковий колір, або хоч одна з них буде такого ж кольору як O або O'. У цьому випадку існування двох точок однакового кольору, відстань між якими дорівнює 1, установлено. Нехай точки O і O' однакового кольору, а точки A, B, C мають різний колір, що відрізняється від кольору точок O і O'. Побудуємо сферу з центром у точці O радіуса OO'. Якщо на сфері існує точка P, колір якої не співпадає з кольором точки O, то прийдемо до попереднього випадку. Тому вважатимемо, що всі точки сфери мають однаковий колір. Оскільки діаметр сфери $D = \frac{2}{3}\sqrt{6} > 1$, то на ній завжди знайдуться дві точки, відстань між якими дорівнює 1. **3.** Якщо a, b, c – сторони, S – площа трикутника, то

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} \Rightarrow h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)r.$$

Аналогічно отримуємо рівності $h_b = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right)r, \quad h_c = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)r$.

Насамкінець, використовуючи співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним для двох чисел, встановлюємо нерівність

$$h_a + h_b + h_c = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)r + \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right)r + \left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right)r =$$

$$= \left(3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\right)r \ge 9r.$$

4. Способом алгебраїчного додавання отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0, \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0, \end{cases}$$

яка рівносильна сукупності чотирьох наступних систем:

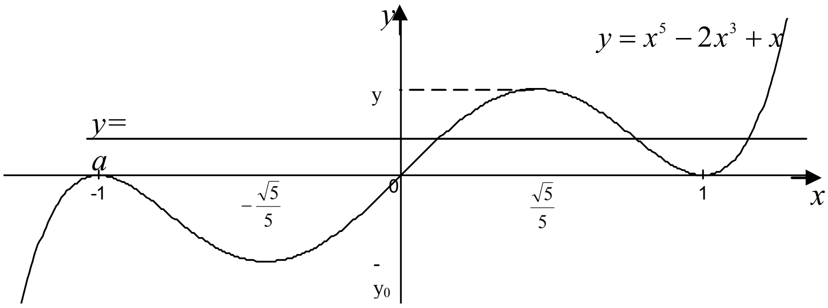
$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи, отримаємо розв'язки заданої системи рівнянь:

$$(0;0), (3;3), \left(\pm\sqrt{5}; \mp\sqrt{5}\right), \left(\frac{\sqrt{11} \pm \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{11} \mp \sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{11} \pm \sqrt{3}}{2}; \frac{-\sqrt{11} \mp \sqrt{3}}{2}\right).$$

5. *1-й спосіб.* Розв'язками рівняння є абсциси спільних точок графіка функції $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ і прямої $y = a$. За допомогою похідної $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 - 1 = (5x^2 - 1)(x^2 - 1)$ встановлюємо, що: функція зростає в інтервалах $(-\infty; -1), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right), (1; +\infty)$ і спадає в інтервалах $\left(-1; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$,

$\left(\frac{\sqrt{5}}{5};1\right)$; -1 і $\frac{\sqrt{5}}{5}$ – точки максимумів, $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ і 1 – точки мінімумів (мал. 78). Оскільки $f(\pm 1)=0,\ f\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\pm\frac{16\sqrt{5}}{125}=\pm y_0$, то з малюнка видно, що рівняння має три корені, якщо $a\in\left(-\frac{16\sqrt{5}}{125};\frac{16\sqrt{5}}{125}\right)$, два корені для $a=\pm\frac{16\sqrt{5}}{125}$ і один корінь, якщо $|a|>\frac{16\sqrt{5}}{125}$.



Мал. 78

2-й спосіб. Якщо $a=0$, то рівняння має три корені: 0 і ± 1. Тому розглядатимемо випадки, коли $a\neq 0$, а отже, й $x\neq 0$. У цих випадках рівняння запишемо так:

$$x^4-2x^2+1=\frac{a}{x}\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2=\frac{a}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^2-1\right|=\sqrt{\frac{a}{x}},\\ ax>0.\end{cases}$$

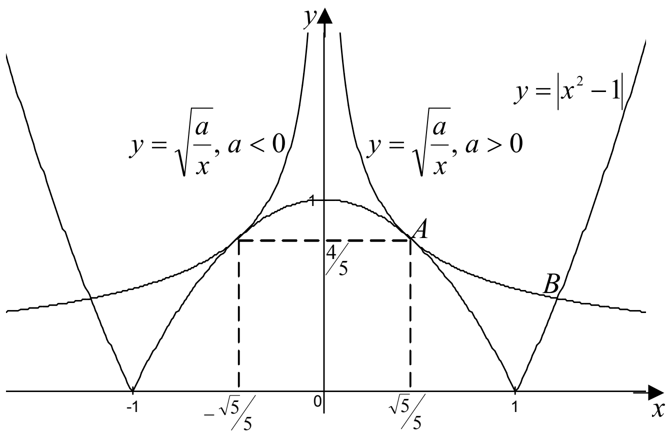
Кількість розв'язків рівняння співпадає з кількістю спільних точок графіків функцій $f(x)=\left|x^2-1\right|$ і $g(x)=\sqrt{\frac{a}{x}}$. Знайдемо значення параметра a, при якому графіки функцій дотикаються, тобто мають спільну дотичну. Для цього треба розв'язати рівняння $f'(x)=g'(x)$. З малюнка 79 зрозуміло, що таких точок дві і їхні абсциси підпорядковані умові $0<|x|<1$. Тому, якщо $0<x<1$, маємо

$$(1-x^2)'=\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)'\Leftrightarrow -2x=-\frac{1}{2}\sqrt{a}x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow x=\left(\frac{a}{16}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

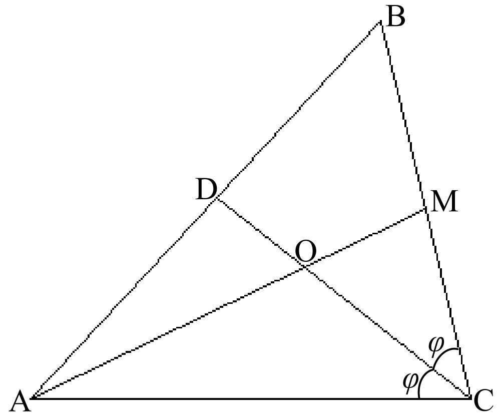
Знайдемо ординату точки дотику і відповідне значення параметра a:

$$\begin{cases}y=1-\left(\frac{a}{16}\right)^{\frac{2}{5}},\\ y=\sqrt{a:\left(\frac{a}{16}\right)^{\frac{1}{5}}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{16}{25\sqrt{5}},\\ y=\frac{4}{5}.\end{cases}$$

Отже, при $a=\frac{16}{25\sqrt{5}}$ графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ дотикаються в точці $A\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{4}{5}\right)$ і перетинаються в точці B. Тому рівняння в цьому випадку має два розв'язки. Цей висновок зберігається й для випадку $a=-\frac{16}{25\sqrt{5}}$ Якщо $|a|>\frac{16}{25\sqrt{5}}$, то рівняння має один розв'язок, якщо $|a|<\frac{16}{25\sqrt{5}}$ – три.



Мал. 79



Мал. 80

6. *1-й спосіб.* З рівності $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ADC}+S_{\Delta DCB}$, де $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin 2\varphi$, $S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}CD\cdot b\sin\varphi$, $S_{\Delta DCB}=\frac{1}{2}CD\cdot a\sin\varphi$, маємо $CD=\frac{2ab}{a+b}\cos\varphi$ (мал. 80).

Аналогічно отримуємо рівність $CO=\frac{2ab}{a+2b}\cos\varphi$. Далі знаходимо

$$\frac{CO}{OD}=\frac{CO}{CD-CO}=\frac{a+b}{b}.$$

2-й спосіб. Точки M і O лежать на сторонах BC і CD трикутника BCD, а точка A – на продовженні сторони BD. Ці точки лежать на прямій. Тому за теоремою Менелая (див. Додаток)

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CO}{OD}\cdot\frac{DA}{AB}=1\Rightarrow\frac{CO}{OD}=\frac{AB}{AD}\Leftrightarrow\frac{CO}{OD}=\frac{AD+DB}{AD}\Leftrightarrow\frac{CO}{OD}=1+\frac{DB}{AD}.$$

За властивістю бісектриси $AD:DB=b:a$. Тому $CO:OD=(a+b):b$.

7. Многочлен

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)$$

є неперервною функцією на множині дійсних чисел. Оскільки

$$P(a)=(a-b)(a-c)>0,\ P(b)=(b-a)(b-c)<0,\ P(c)=(c-a)(c-b)>0$$

і

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-a)(x-b)(x-c)\left(1+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-a}\right)=-\infty,$$

то існують точки $x_1 \in (-\infty; a), x_2 \in (a; b), x_3 \in (b; c)$, у яких графік многочлена перетинає вісь абсцис, тобто числа x_1, x_2, x_3 є різними коренями рівняння $P(x) = 0$. **8.** Припустимо, що існують степені числа 2 з показниками m і $n, m > n$, десятковий запис яких виконаний однаковими цифрами. Зрозуміло, що 2^m і 2^n – числа однакового порядку, тому $2^m : 2^n < 10$. Оскільки остачі від ділення цих степенів на 9 рівні, то їхня різниця повинна ділитися на 9:

$$2^m - 2^n = 2^n\left(2^{m-n} - 1\right) \vdots 9 \Rightarrow \left(2^{m-n} - 1\right) \vdots 9 \Rightarrow 2^{m-n} \geq 64.$$

Отриманий результат суперечить нерівності $2^m : 2^n < 10$. Отже, припущення хибне. **9.** Візьмемо дві точки A і C, відстань між якими $2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Якщо точки мають різний колір, то побудуємо ромб $ABCD$, сторона якого дорівнює 1. Обертаючи ромб навколо діагоналі AC, отримаємо два конуси з спільною основою та вершинами A і C. Впишемо в основу конусів правильний трикутник. Нескладно переконатися, що довжина його сторони дорівнює 1. Якщо вершини цього трикутника мають однаковий колір, то він є шуканим. В іншому разі дві його вершини однакового кольору разом з вершиною одного з конусів будуть вершинами шуканого трикутника. У випадку, коли точки A і C однакового кольору, побудуємо сферу з центром в точці A радіуса AC. Якщо на сфері знайдеться точка C', колір якої відрізняється від кольору центра сфери, то приходимо до розглянутого випадку. Тому вважатимемо, що всі точки сфери мають однаковий колір. У цьому випадку сферу можна так перетнути площиною, що в коло перетину можна вписати правильний трикутник зі стороною 1. Він і буде шуканим трикутником. **10.** Якщо функція f – розв'язок рівняння, то рівність $f\left(x^2 - 2x + 2^y\right) = f(x) + f(-1 - y^3)$ виконується для всіх дійсних чисел x і y. Покажемо, що для будь-якого x можна вибрати y_0 так, щоб виконувалася рівність $x^2 - 2x + 2^{y_0} = -1 - y_0^3$. Для цього розглянемо рівняння $2^y + a = -y^3$, де $a = (x-1)^2$. Користуючись графічним способом нескладно переконатися, що це рівняння при будь-якому значенні параметра a має єдиний розв'язок y_0. Тоді для довільного x і $y = y_0$ виконуватиметься рівність $f\left(x^2 - 2x + 2^{y_0}\right) = f(-1 - y_0^3)$, а отже, $f(x) = 0$ для всіх x. **11.** Якщо x_1, x_2, x_3, x_4 – корені рівняння, то їхня сума дорівнює -4, а добуток – одиниці. Запишемо співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним для чисел, протилежних кореням рівняння:

$$\frac{-x_1 + (-x_2) + (-x_3) + (-x_4)}{4} \geq \sqrt[4]{(-x_1) \cdot (-x_2) \cdot (-x_3) \cdot (-x_4)}.$$

Оскільки і ліва частина, і права частина співвідношення рівні 1, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$. **12.** *1-й спосіб.* Нерівність рівносильна такій нерівності:

$$\sin^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^4.$$

Далі скористаємося співвідношенням між середнім геометричним і середнім арифметичним

$$\sin^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{3}\right)^3=\left(\sqrt[4]{\sin^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{3}\right)^3}\right)^4\le\left(\frac{\sin^2 x+3\left(\frac{\cos^2 x}{3}\right)}{4}\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4.$$

2-й спосіб. Запишемо нерівність так: $\sin^2 x\cos^6 x-\frac{3^3}{4^4}\le 0$. Утворимо функцію $g(x)=\sin^2 x\cos^6 x-\frac{3^3}{4^4}$ і знайдемо її найбільше значення на множині дійсних чисел. Оскільки функція періодична з періодом 2π і парна, то дослідження досить провести на відрізку $[0;\pi]$. На цьому відрізку функція диференційовна. Її похідна $g'(x)=2\sin x\cos^7 x-6\sin^3 x\cos^5 x$ дорівнює нулю у внутрішніх точках $x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{\pi}{2}, x_3=\frac{5\pi}{6}$ відрізка, а також на його кінцях $x_0=0$ і $x_4=\pi$. Обчислюючи значення функції у знайдених точках, дістанемо, що $\max\limits_{[0;\pi]} g(x)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(5\frac{\pi}{6}\right)=0$, тобто $g(x)\le 0$ для всіх $x\in[0;\pi]$, а отже, і для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$. **13.** Позначимо дане число літерою a. Тоді

$$a=\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\cdot\sqrt[2^4]{5\sqrt{6...\sqrt{2005}}}=\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[2^4]{5\sqrt{6...\sqrt{2005}}}>2.$$

Доведемо нерівність $a<3$, що рівносильна нерівності $\ln a<\ln 3$.

$$\ln a=2\ln a-\ln a=2\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2^2}\ln 3+...+\frac{1}{2^{2003}}\ln 2004+\frac{1}{2^{2004}}\ln 2005\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2^2}\ln 3+...+\frac{1}{2^{2003}}\ln 2004+\frac{1}{2^{2004}}\ln 2005\right)=$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2^2}\ln\frac{4}{3}+...+\frac{1}{2^{2003}}\ln\frac{2005}{2004}-\frac{1}{2^{2004}}\ln 2005<$$

$$<\ln 2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2003}}\right)\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{2004}}\ln 2005<\ln 2+\ln\frac{3}{2}=\ln 3.$$

Отже, $2<a<3$, а тому $[a]=2$. **14.** Сума, що міститься під знаком границі, є інтегральною сумою функції $f(x)=x^{2004}$, що відповідає розбиттю відрізка $[0;1]$ на n однакових частин. Тому границя є інтегралом $\int\limits_0^1 x^{2004}dx$ і дорівнює $\frac{1}{2005}$.

15. Нехай $y=0$, а x – довільне дійсне число. Тоді $f(ax)=a+x$, де $f(0)=a$. Зрозуміло, що $a\ne 0$. Тому заміною $ax\to x$ отримуємо $f(x)=a+\frac{x}{a}$. Виконаємо перевірку: $f(xf(y))=f\left(x\left(a+\frac{y}{a}\right)\right)=a+\frac{x}{a}\left(a+\frac{y}{a}\right)=a+x+\frac{xy}{a^2}=\frac{1}{a}f(xy)+x.$

Зрозуміло, що функція f задовольнятиме рівність тільки за умови, що $a=1$. Тому $f(x)=x+1$, а $f(2004)=2005$. **16.** Розглянемо спочатку випадок, коли друга сфера міститься усередині першої. При цьому сфери дотикаються внутрішнім чином і $\frac{R_2}{2R_1 - R_2} = \sin\varphi$, де φ – кут між висотою DD_0 тетраедра і висотою DC_0 грані DAB. Оскільки $\sin\varphi = D_0C_0 : C_0D = 1:3$, то $R_2 : (2R_1 - R_2) = 1:3$ або $R_1 : R_2 = 2$. Якщо друга сфера дотикається до першої зовні, то $R_2 : (2R_1 + R_2) = 1:3$ і $R_1 : R_2 = 1$. **17.** Помістимо піраміду в прямокутну декартову систему координат так, щоб її основа лежала в першій чверті координатної площини xOy, вершина C співпала з початком координат, вершина B лежала на осі абсцис, а вісь аплікат утворювала з ребром CS гострий кут (мал. 81). Ребра піраміди розглядатимемо як вектори. Площу перерізу шукатимемо за формулою $S_{\Delta SCE} = \frac{1}{2}\left|\vec{CE}\right| \cdot \left|\vec{CS}\right| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{CE}$ і $\vec{CS}$. За умовою задачі маємо $\left|\vec{CS}\right| = a$. Оскільки

$$\vec{CB} = (a; 0; 0), \vec{BA} = \vec{CD} = (a\cos\beta; a\sin\beta; 0),$$

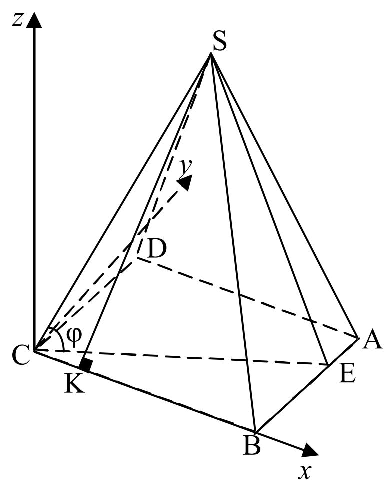
то

$$\vec{CE} = \vec{CB} + \vec{BE} = \vec{CB} + \frac{2}{3}\vec{BA} =$$

$$= \left(a + \frac{2}{3}a\cos\beta; \frac{2}{3}a\sin\beta; 0\right), \left|\vec{CE}\right| = \frac{a}{3}\sqrt{13 + 12\cos\beta}.$$

Для відшукання кута φ спочатку знайдемо його косинус за формулою

$$\cos\varphi = \left(\vec{CS}, \vec{CE}\right) : \left|\vec{CS}\right| \cdot \left|\vec{CE}\right|.$$



Мал. 81

Визначимо координати x і y вектора $\vec{CS} = (x, y, z)$. З трикутника CKS маємо $x = a\cos\alpha$. Координату y знайдемо, використовуючи скалярний добуток:

$$\begin{cases} \left(\vec{CS}, \vec{CD}\right) = a^2 \cos\alpha \cos\beta + ay \sin\beta, \\ \left(\vec{CS}, \vec{CD}\right) = a^2 \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{a(1-\cos\beta)\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

Далі знаходимо $\cos\varphi = \frac{5\cos\alpha}{\sqrt{13+12\cos\beta}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{13+12\cos\beta - 25\cos^2\alpha}}{\sqrt{13+12\cos\beta}}$.

Насамкінець визначаємо площу перерізу $S = \frac{a^2}{6}\sqrt{13+12\cos\beta-25\cos^2\alpha}$.

2005 – 2006 навчальний рік

VII КЛАС

1. 11 і 46. **2.** Оскільки суми $5+13$ і $8+13$ діляться на 3, а одна дівчинка ходить у дитсадок, то Вірі 5 років, а Ані – 13. Аня старша за Борю , тому Борі 8 років, а Галі – 15. **3.** $1\times(2+3)\times4\times5=100$. **4.** Спочатку змінимо одиницю вимірювання швидкостей руху братів: $1/12$ км/хв. і $1/3$ км/хв. – швидкість переміщення Олега пішки і на велосипеді відповідно, $1/15$ км/хв. і $1/4$ км/хв. – Тараса. Зазначимо, що брати одночасно вирушили в дорогу і повинні одночасно прибути до бабусі. Якщо Олег виїжджає велосипедом і через x хвилин його залишає Тарасу, то приходимо до рівняння

$$x + \frac{20-\frac{1}{3}x}{\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{15}} + \frac{20-\frac{1}{3}x}{\frac{1}{4}}.$$

З рівняння маємо $x=24$. Отже, Олег їхав 24 хв., йшов 144 хв. і був у дорозі 2 год. 48 хв. У разі, коли Тарас виїжджає велосипедом і їде t хвилин, дістаємо рівняння

$$t + \frac{20-\frac{1}{4}t}{\frac{1}{15}} = \frac{\frac{1}{4}t}{\frac{1}{12}} + \frac{20-\frac{1}{4}t}{\frac{1}{3}} \Rightarrow t = 48.$$

Далі визначаємо час руху Тараса пішки, він складає 120 хв. Отже, і в цьому разі брати добралися б до бабусі за 2 год. 48 хв. **5.** Нескладно встановити другий множник і передостанню цифру першого множника: вони дорівнюють 29 і 4 відповідно. Далі встановлюється перша цифра 7 першого множника. **6.** Нехай x – вартість книги. Тоді приходимо до рівняння $(x-35)+(x-40)=0,4x$. Розв’язавши рівняння, встановлюємо, що книга коштує 125 копійок. **7.** Якщо човнова станція C розташована так, як вимагається в задачі, то трикутник ACB

– рівнобедрений: $AB = AC$. Тому човнову станцію треба розташувати на перетині серединного перпендикуляра до відрізка AB з річкою. Задача має єдиний розв'язок за винятком того випадку, коли селища розташовані на прямій, перпендикулярній до русла річки, але знаходяться на різній відстані від нього. **8.** *Ні, не можна.* Якби вдалося записати числа так, як вимагається в задачі, то в кожному рядку сума всіх чисел була б парним числом, а цього бути не може, бо $1+2+...+25=325$ – число непарне. **9.** *Ні, не можна*. Якщо додати чотири перші числа і відняти п'яте, то дістанемо число 36, яке дорівнює подвоєній кількості дерев у другому, третьому і четвертому садках. Оскільки подвоєна кількість дерев у третьому і четвертому садках дорівнює 38, то твердження Петрика хибне. **10.** Таким числом може бути, зокрема, число $m = n+2$: $mn+1=(n+2)n+1=(n+1)^2$. **11.** Візьмемо довільну точку C так, щоб на відрізках AC і BC не було перешкод. За допомогою циркуля і лінійки побудуємо трикутник ACD, рівний трикутнику ABC. Це можна зробити за відрізком AC та кутами BAC і ACB. Тоді $AB = AD$. **12.** Нехай $\overline{abc}$ – задане трицифрове число, $\overline{ac}$ – утворене число. Тоді

$$\overline{abc} = 9\cdot\overline{ac} \Leftrightarrow 100a+10b+c=90a+9c \Leftrightarrow 10(a+b)=8c \Rightarrow c=5.$$

Оскільки число $\overline{abc}$ кратне 9, то сума його цифр $a+b+c$ повинна ділитися на 9. Це може бути тільки тоді, коли $a+b=4$. Шляхом перебору можливих значень доданків знаходимо усі шукані числа. *Відповідь*: 135, 225, 315, 405. **13.** Відстань між числами 1005 і -1005 на числовій прямій дорівнює 2010. Тому сума відстаней від точки x до вказаних точок не може бути меншою за 2010. Отже, рівняння не має розв'язків. **14.** Оскільки $2003^{2003} = \left(2003^4\right)^{500} 2003^3$, а степені 2003^4 і 2003^3 закінчуються цифрами 1 і 7 відповідно, то число $2003^{2003}+5$ закінчується цифрою 2, а отже, не може бути квадратом натурального числа. **15.** Відкладемо на тій стороні кута, де має міститися точка B, відрізок OC довжиною l. Потім побудуємо кут CAP, рівний куту OCA так, щоб промінь AP був між променями AO і AC. Точка перетину променів OC і AP буде шуканою точкою B. **16.** Покладемо на одну шальку терезів дві монети, що лежать поруч, а на іншу шальку покладемо дві монети, які також лежать поруч, але через одну монету від взятих за першим разом. Якщо терези зрівноважені, то дві монети, що залишилися лежати поруч – фальшиві, в іншому разі фальшиві монети лежать на шальці з меншою вагою. **17.** Зрозуміло, що про одноцифрові числа мова не йде, бо не існує суми з одним доданком. Позначимо через n – непарні цифри, а через p – парні. Тоді $\overline{np}$ – парне двоцифрове число з непарною сумою цифр, а $\overline{nn}$ – непарне двоцифрове число з парною сумою цифр. Оскільки кількість парних і непарних цифр однакова і дорівнює 5, то кількість чисел $\overline{np}$ і $\overline{nn}$ також однакова і дорівнює 25. Враховуючи, що 100 – число парне, а сума його цифр непарна, робимо висновок, що проміж натуральних чисел від 1 до 100 парних чисел з непарною сумою цифр більше, ніж непарних чисел з парною сумою цифр. Якщо k – непарна цифра, q – парна цифра, то парні двоцифрові і трицифрові числа з непарною сумою цифр можна записати так: $\overline{npq}$ і $\overline{pnq}$. Їхня кількість складає $5\cdot5\cdot5+5\cdot5\cdot5=250$ чисел. Числа $\overline{pkn}$ і $\overline{kpn}$ – двоцифрові і трицифрові непарні числа з парною сумою цифр. Їх також 250. Оскільки 1000 – парне число з непарною сумою цифр, то таких чисел більше. **18.** Якщо йдеться про квадрат 2×2, то в ньому зафарбовує останню клітинку дівчинка, що розфарбувала його першу клітинку. Аналогічний висновок можна зробити й стосовно квадрата 4×4. Тому, поділивши квадрат 6×6 на квадрати 4×4 і 2×2, нескладно визначити, що переможницею буде Катя.

VIII КЛАС

1. Найменше значення виразу дорівнює 3 за умови, що $x=2$, бо $x^2-4x+7=(x-2)^2+3$. **2.** Подільність виразу випливає з рівності $n^5+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5n^3$. **3.** Оскільки $135+110<250$, то такої ділянки не існує. **4.** Графіком функції є пряма $y=x+6$, з якої вилучена точка $(1;7)$. **5.** $x\geq2$. Щоб знайти розв'язки, запишемо рівносильне рівняння $|x-1|=|2-1|+|x-2|$ і скористаємося геометричним тлумаченням модуля: відстань точки x до точки 1 дорівнює сумі відстаней точки 2 до точки 1 і відстані точки x до точки 2. Це може бути тільки за умови, що на числовій прямій точка x лежить праворуч від точки 2 або збігається з нею.

Зазначимо, що рівняння можна розв'язати методом інтервалів або звести його до квадратного рівняння, використовуючи тотожність $|a|^2=a^2$. **6.** Позначимо через x швидкість зустрічного поїзда. Тоді поїзди рухаються назустріч один одному з швидкістю $x+60$ км/год. З цією швидкістю вони за 4 секунди пройдуть 120 метрів. Тому маємо рівняння $(60+x)\cdot\frac{4}{3600}=0{,}12$, з якого знаходимо $x=48$. *Відповідь:* 48 км/год. **7.** Позначимо через x кількість зеленої маси вологістю 85% потрібної для утворення 1 т зеленої маси вологістю 75%. Приходимо до рівняння $0{,}85x0{,}35(1-x)=0{,}75$, з якого знаходимо $x=0{,}8$. Отже, зеленої маси вологістю 85% потрібно взяти 0,8 т, а маси вологістю 35% – 0,2 т. **8.** Побудуємо довільний квадрат і з'єднаємо одну з його вершин з серединою протилежної сторони. Утвориться прямокутний трикутник. Зрозуміло, що величини гострих кутів цього трикутника не залежать від розмірів квадрата. Позначимо через α і β його кути біля вершини квадрата і середини сторони відповідно. Нехай A – задана вершина, O – середина протилежної сторони шуканого квадрата. Побудуємо трикутник ABO, у якого $\angle BAO=\alpha$, $\angle BOA=\beta$. Подальші дії очевидні. Задача має два розв'язки залежно від того, у якій півплощині будувати вершину B. **9.** Рівняння $(x^2-1)(x-p)=0$, де p – ціле число, має цілі корені ± 1 і p і рівносильне рівнянню $x^3+px^2-x+p=0$. Тому гравцю, що починає гру, потрібно біля x поставити -1. Якщо другий учень ставить ціле число p, то першому на вільне місце потрібно поставити число протилежне, тобто $-p$. **10.** Виразимо x через y: $x=\dfrac{1-2006y}{2005}=\dfrac{1-y}{2005}-y$. Зрозуміло, що x буде цілим числом, якщо $\dfrac{1-y}{2005}=n$ – ціле число. Тому $x=-1+2006n, y=1-2005n,$ де n – довільне ціле число, всі цілі розв'язки рівняння. **11.** *Так, можна.* Спочатку розглянемо суму перших 8 доданків і розіб'ємо доданки на 4 групи наступним чином:

$$1+2+3+4+5+6+7+8=(1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5).$$

Потім аналогічно поступимо з наступними доданками $8n+1, 8n+2, ..., 8n+7$, $8n+8$, виділивши 4 групи доданків:

$$\left((8n+1)+(8n+8)\right)=\left((8n+2)+(8n+7)\right)=$$

$$=\left((8n+3)+(8n+6)\right)+\left((8n+4)+(8n+5)\right)=16n+9,$$

де $n=1,2,...,249$. Зрозуміло, що суми перших пар виділених доданків дорівнюють сумам других, третіх і четвертих пар виділених доданків. **12.** Очевидно, що $\overline{yx}$ і $\overline{zy}$ – квадрати цілих чисел. Оскільки квадрати цілих чисел можуть закінчуватися цифрами 1, 4, 5, 6 і 9, то цифри x, y можуть набувати тільки таких значень. Тому число $\overline{yx}$ треба шукати серед чисел 16, 49, 64, тобто x може дорівнювати 4, 6 або 9. Враховуючи, що сума $x+z$ повинна бути цифрою і $z\neq 0$, то $x\neq 9$. Якщо $x=6, y=1$, то $\overline{zy}=81$. Цього бути не може, бо $x+z=6+8=14>9$. У другому випадку $x=4, y=6$. При цьому $z=1$ або $z=3$. Нескладно переконатися, що $z=3$. *Відповідь:* $x=4, y=6, z=3$. **13.** –2005. За означенням арифметичного кореня маємо $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$ Оскільки $1-x\geq 0$, то $|1-x|=1-x$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню $\sqrt{1-x}=\sqrt{2006}$. Звідси $x=-2005$. **14.** Використовуючи суму внутрішніх кутів трикутника A_1BC_1, величину розгорнутого кута AB_1C та умови задачі, маємо: $\angle A_1BC_1=180°-\angle A_1C_1B-\angle BA_1C_1=180°-\angle A_1B_1C-\angle AB_1C_1=\angle A_1B_1C_1=60°$.

З розгорнутого кута AC_1B, умов задачі і трикутника AB_1C_1 маємо:

$$\angle AC_1B=180°-60°-\angle A_1C_1B=180°-\angle AB_1C_1-\angle B_1AC_1\Rightarrow\angle A_1CB_1=60°.$$

Оскільки $\angle A_1BC_1=\angle B_1AC_1=60°$, то $\angle A_1CB_1=60°$, а отже, трикутник ABC – рівносторонній. **15.** Нехай число a найменше з чисел. Тоді маємо рівність

$$1+2^{b-a}=2^{c-a}+2^{d-a}.$$

Якщо $b=a$, то з рівності $1+1=2^{c-a}+2^{d-a}$ випливає, що $c=a$ і $d=a$. Тому $a+b=c+d$. У випадку, коли $b>a$, $1+2^{b-a}$ – непарне число. Тому число $2^{c-a}+2^{d-a}$ також непарне. Тоді або $c-a=0, d-a\neq 0$, або $c-a\neq 0, d-a=0$. У першому випадку $c=a$ і $2^{b-a}=2^{d-a}$. Звідси $b-a=d-a\Rightarrow b=d$ і $a+b=c+d$.

Цю рівність маємо і в другому випадку. **16.** Дане рівняння рівносильне рівнянню $(n-3)(k+19)=1949$. Оскільки число 1949 – просте, то приходимо до такої сукупності систем рівнянь:

$$\begin{cases} n-3=1; \\ k+19=1949, \end{cases} \quad \begin{cases} n-3=1949; \\ k+19=1, \end{cases} \quad \begin{cases} n-3=-1; \\ k+19=-1949, \end{cases} \quad \begin{cases} n-3=-1949; \\ k+19=-1. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння цих систем, дістаємо розв'язки даного рівняння. *Відповідь:* $1980; 4, \quad -18; 1952, \quad -1968; 2, \quad -20; -1946$.

17. *Так, для кожного*. Нехай n – довільне натуральне число, а p і q натуральні числа такі, що

$$n^3 = p^2 - q^2 \Leftrightarrow n \cdot n^2 = (p-q)(p+q).$$

Якщо $p-q=n,\ p+q=n^2$, то $p=\dfrac{n^2+n}{2},\ q=\dfrac{n^2-n}{2}$ – натуральні числа для будь-якого натурального числа n. Отже, $n^3=\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)^2$. Зауважимо, що таке подання n^3 не єдине. Так, зокрема $n^3=\left(\dfrac{n^3+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n^3-1}{2}\right)^2$, якщо n непарне число. і $n^3=\left(\dfrac{n^3+4}{4}\right)^2-\left(\dfrac{n^3-4}{4}\right)^2$, коли n парне. **18.** Оскільки кількість абсолютно сухої грибної маси збільшилася удвічі (з 1% до 2%), то маса грибів після підсушування зменшилася удвічі. **19.** *Ні, не можна*. Зрозуміло, що для покриття шахівниці потрібно 25 фігурок. Кожна фігурка покриває або три білих і одну чорну клітинки, або три чорних і одну білу. На шахівниці однакова кількість білих і чорних клітинок. Тому й фігурок указаних типів повинна бути однакова кількість. Але 25 націло не ділиться на 2.

IX КЛАС

1. *Так, може, якщо* $x \in (6;7)$, *а* $y=\dfrac{42}{x}$. Нехай $x>0$ і $y>0$ такі числа. Тоді маємо наступну мішану систему:

$$\begin{cases} xy=42, \\ x+y<13 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=\dfrac{42}{x}, \\ x+\dfrac{42}{x}<13. \end{cases}$$

Розв'язавши нерівність, дістанемо шукані числа. **2.** 2. Помножимо і поділимо ліву частину рівняння на спряжений вираз:

$$\frac{\left(\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{5+4x-x^2}\right)\left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{5+4x-x^2}\right)}{\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{5+4x-x^2}}=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{5+4x-x^2}} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{4x-x^2}-\sqrt{5+4x-x^2} = -1.$$

Далі з системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{4x-x^2}+\sqrt{5+4x-x^2} = 5, \\ \sqrt{4x-x^2}-\sqrt{5+4x-x^2} = -1 \end{cases}$$

спочатку знаходимо $\sqrt{4x-x^2} = 2$, а потім $x = 2$. **3.** Розв'яжемо рівняння відносно x:

$$x = \frac{19-7y}{5} = 3-y+2\frac{2-y}{5} \Rightarrow 2-y = 5n, x = 3-y+2n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1+7n, y = 2-5n, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Позначимо через x довжину бісектриси, m і n – довжини відрізків BA_1 і A_1C відповідно, β і γ – кути трикутника з вершинами в точках B і C відповідно. *Перший спосіб.* За теоремою синусів з трикутників ABA_1 і ACA_1 маємо рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{x}{\sin\beta}, \\ \dfrac{n}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{x}{\sin\gamma}, \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{n}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{x}{\sin\beta} + \frac{x}{\sin\gamma} \Rightarrow x = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\beta+\sin\gamma)\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

За теоремою синусів з трикутника ABC отримуємо рівності:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\frac{\alpha}{2}, \sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Далі визначаємо x:

$$x = \frac{a\cdot\dfrac{b}{a}\sin\alpha\cdot\dfrac{c}{a}\sin\alpha}{\left(\dfrac{b}{a}\sin\alpha+\dfrac{c}{a}\sin\alpha\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2bc\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Другий спосіб. Використаємо формули для обчислення площ трикутників і властивість площі.З рівностей

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, S_{ABA_1} = \frac{1}{2}cx\sin\frac{\alpha}{2}, S_{ACA_1} = \frac{1}{2}bx\sin\frac{\alpha}{2}$$

маємо

$$\frac{1}{2}(b+c)x\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \frac{bc\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2(b+c)}.$$

5. Припустимо, що існує аеродром A_0, на який прилетіли літаки з аеродромів $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Тоді в кожному з трикутників $A_0A_1A_2$, …, $A_0A_5A_6$, $A_0A_6A_1$ сторони, відповідно, A_1A_2, …, A_5A_6, A_6A_1 є найбільшими. Кути, що лежать проти цих сторін, також найбільші і кожний з них більший за $60°$. Тому їхня сума більша за $360°$. Водночас ця сума повинна дорівнювати $360°$. Отримана суперечність спростовує припущення. **6.** Помножимо обидві частини нерівності на вираз $(x+3)(y+3)(z+3)(t+3)$. Після тотожних перетворень, з урахуванням рівності $xyzt=1$, дістанемо рівносильну нерівність

$$2(xyz+xyt+xzt+yzt)+3(xy+xz+xt+yz+yt+zt)\geq 26.$$

Застосуємо співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним до доданків сум у дужках, враховуючи рівність $xyzt=1$:

$$xyz+xyt+xzt+yzt=2\left(\frac{xyz+xyt}{2}+\frac{xzt+yzt}{2}\right)\geq$$

$$\geq 2\left(\sqrt{xyz\cdot xyt}+\sqrt{xzt\cdot yzt}\right)=2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{zt}\right)\geq 4\sqrt{xyzt}=4,$$

$$xy+xz+xt+yz+yt+zt=2\left(\frac{xy+zt}{2}+\frac{xz+yt}{2}+\frac{xt+yz}{2}\right)\geq$$

$$2\left(\sqrt{xy\cdot zt}+\sqrt{xz\cdot yt}+\sqrt{xt\cdot yz}\right)=6.$$

За допомогою отриманих результатів завершуємо доведення нерівності:

$$2(xyz+xyt+xzt+yzt)+3(xy+xz+xt+yz+yt+zt)\geq 2\cdot 4+3\cdot 6=26.$$

7. З точок D, M і C опустимо перпендикуляри на пряму AB. Ці перпендикуляри є висотами трикутників AKD, KML і LCB відповідно. Перпендикуляр, опущений з точки M, є середньою лінією утвореної трапеції і дорівнює половині суми основ трапеції, якими є два інші перпендикуляри. Подальше розв’язання задачі очевидне. **8.** Даний вираз є квадратним тричленом відносно змінної y зі старшим коефіцієнтом $-x^2$ і коренями $\frac{1+x\pm 2x^2}{x}$. Тому його можна подати у вигляді добутку

$$-x^2\left(y-\frac{1+x+2x^2}{x}\right)\left(y-\frac{1+x-2x^2}{x}\right),$$

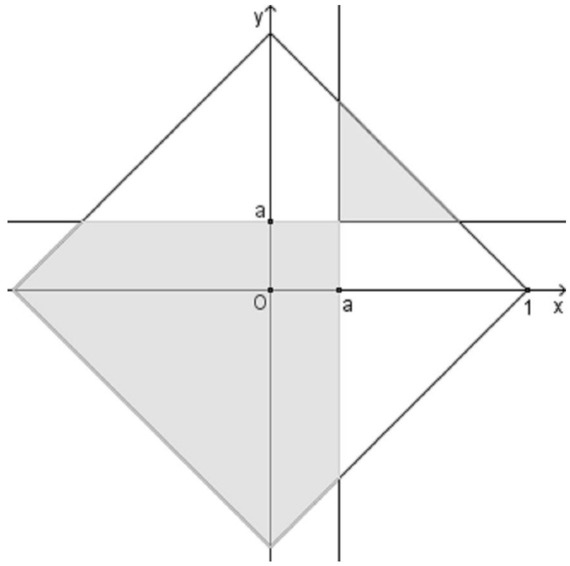
який після тотожних перетворень набуває вигляду

$$(2x^2-xy+x+1)(2x^2+xy-x-1).$$

9. З мал. 82 видно, що площа фігури, координати точок якої задовольняють нерівності системи, складається з площі квадрата зі стороною a, площ двох рівних прямокутних трапецій і площ двох прямокутних трикутників:

$$S=a^2+2\frac{1+(1-a)}{2}a+\frac{1}{2}(1-2a)^2+\frac{1}{2}.$$

Після виконання дій дістаємо рівність $S=2a^2+1$. Отже, найменша площа фігури дорівнює 1 за умови, що $a=0$.



Мал. 82

10. 2. Виконаємо рівносильні перетворення рівняння:

$$[2x-1]-[3-x]=2 \Leftrightarrow [2x-1]=[5-x] \Leftrightarrow \begin{cases} [2x-1]=k, \\ [5-x]=k, \\ k\in\mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\le 2x-1<k+1, \\ k\le 5-x<k+1, \\ k\in\mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k+1}{2}\le x<\dfrac{k+2}{2}. \\ 4-k<x\le 5-k, \\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Необхідною умовою існування розв'язків останньої системи нерівностей з цілим параметром k є нерівності $\frac{k+1}{2}\le 5-k$ і $4-k<\frac{k+2}{2}$. Звідси знаходимо $k=3$. З останньої системи нерівностей дістаємо $x=2$. **11.** *Ні, не може*. Нехай n – кількість членів гуртка, x – кількість хлопчиків у гуртку. Нескладно переконатися, що $x>\frac{91}{100}n, n\ge\frac{200}{9}$. Тому $x>\frac{91}{100}\cdot\frac{200}{9}>20$. **12.** *Вказівка.* Для доведення скористайтесь формулою

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}+a^{2n-1}b+...+ab^{2n-1}+b^{2n}\right),$$

яка має місце для всіх дійсних чисел a,b і натуральних чисел n. **13.** Рівняння рівносильне рівнянню $(2x)^3+(x+2)^3=0.$ Тому $x=-\frac{2}{3}.$ **14.** Нехай $a+b=c, ab=d$. Тоді

$$\frac{c}{2-c}\ge\sqrt{\frac{d}{1-c+d}} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{2-c}\right)^2\ge\frac{d}{1-c+d} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (c^2 - 4d)(1-c) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(1-a-b) \ge 0.$
Одержана нерівність очевидна. Розглянемо рівність

$$(a-b)^2(1-a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0, \\ 1-a-b=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b, \\ a=b=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Отже, нерівність перетворюється в рівність тільки тоді, коли $a=b\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

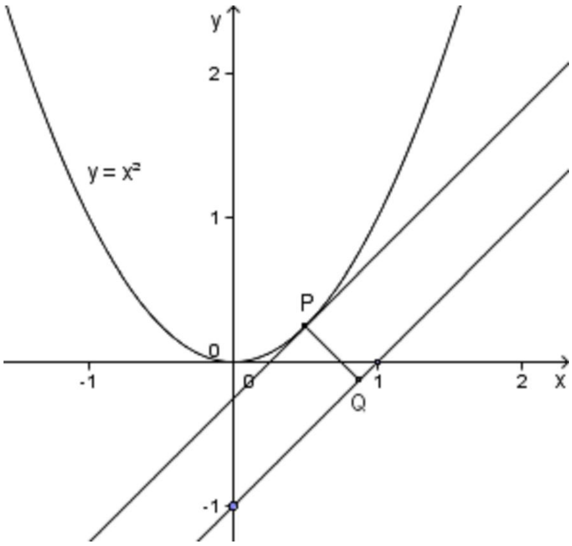
15. Перенесемо всі доданки з правої частини рівності в ліву, додамо й віднімемо вираз $x^2y^2z^2$ і розкладемо на множники: $\left(x^2-yz\right)\left(y^2-zx\right)\left(z^2-xy\right)=0.$ Якщо один з множників, наприклад перший, дорівнює нулю, а всі інші відмінні від нуля, то $x\ne y\ne z$. Тому x^2 – площа квадрата, довжина сторони якого дорівнює x, а yz – площа прямокутника, довжини сторін якого дорівнюють y і z. Якщо два множники дорівнюють нулю, то й третій дорівнюватиме нулю, а $x=y=z.$ У цьому випадку прямокутник вироджується у квадрат. **16.** Якщо α – гострий кут трикутника, b– довжина прилеглого катета, то довжина шляху дорівнює $2b\sin\alpha$, а отже, не залежить від стартового положення кулі на гіпотенузі. **17.** *Кут BCA більший за кут DCA*. Справді, з умови випливає, що $DC>BC$, оскільки проекція DC на BD більша за DE (E – середина BD), а проекція BC менша за BE. Зважаючи на те, що площі трикутників BCE і DCE однакові, відстань від E до BC більша за відстань від E до CD, тому кут BCE більший за кут DCE. (Останній не може бути тупим). **18.** Шукані значення параметра m визначаються умовами: $m>0$ та $(m-2)^2-4m(3-2m)=0$ і дорівнюють $\dfrac{8\pm2\sqrt{7}}{9}$. **19.** Зрозуміло, що хорд більше семи, бо довжина кожної хорди не перевищує 2. Сумарна довжина всіх дуг, що стягують ці хорди, більша за $7\cdot2\pi$. Тому на колі знайдеться точка, що покривається щонайменше вісьмома дугами. Діаметр, проведений з цієї точки, перетне не менше восьми хорд.

X КЛАС

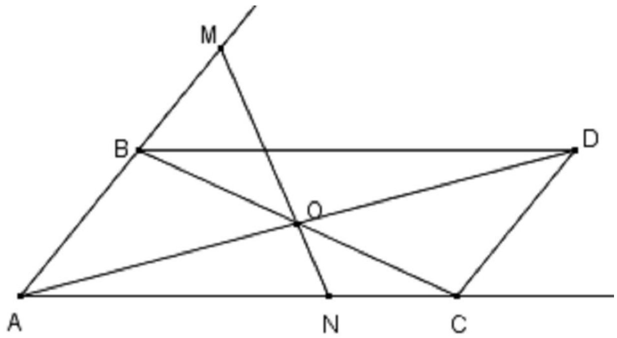
1. $\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{3};\mp\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$. **2.** Якщо пара цілих чисел x і y є розв'язком рівняння, то ці числа повинні бути одночасно або парними, або непарними. В обох випадках ліва частина рівняння ділитися без остачі на 4. Оскільки 2002 на 4 без остачі не ділиться, то рівняння не має цілих розв'язків. **3.** Нехай пряма l, що паралельна заданій прямій, має з параболою єдину спільну точку P, а Q – основа перпендикуляра, опущеного з точки P на задану пряму (мал. 83). Очевидно, що відрізок PQ – шуканий. Обчислимо його довжину. Для цього визначимо координати точок P і Q. Координати точки P дістанемо, знайшовши єдиний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - b = 0, \\ y = x + b. \end{cases}$$

Якщо $b = -\frac{1}{4}$, то перше рівняння системи має єдиний розв'язок $x = \frac{1}{2}$, а система – єдиний розв'язок: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$. Ці числа є координатами точки P. Нескладно переконатися, що $y = -x + \frac{3}{4}$ – рівняння прямої PQ, а $\frac{7}{8}; -\frac{1}{8}$ – координати точки Q. Далі обчислюємо $PQ = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.



Мал. 83



Мал. 84

Зауважимо, довжина відрізка PQ дорівнює відстані d точки $P(a,b)$ до прямої $Ax + By + C = 0$, яка обчислюється за формулою $d = \left| \frac{aA + bB + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$. **4.** Нехай трикутник ABC такий, що точка O – середина сторони BC, а AMN – довільний трикутник (мал. 84). Доведемо, що трикутник ABC має найменшу площу. За властивістю площі маємо рівності

$$S_{ABC} = S_{ABON} + S_{CON}, S_{AMN} = S_{ABON} + S_{BOM}.$$

Якщо точка N лежить між точками A і C, то нескладно переконатися, що $ON < OM$. Тому

$$S_{CON} = \frac{1}{2} ON \cdot OC \sin\varphi \leq \frac{1}{2} OM \cdot OB \sin\varphi = S_{BOM},$$

а $S_{ABC} \leq S_{AMN}$. Для побудови точок B і C потрібно на промені AO побудувати точку D так, щоб $AO = OD$, і провести через точку D прямі, паралельні сторонам даного кута. У перетині дістанемо точки B і C. **5.** Позначимо даний многочлен через $P_k(x)$. Нехай $k = 2m-1$. Тоді многочлен має парну кількість одночленів, які згрупуємо попарно.

$$P_{2m-1}(x) = \left(1 - C_n^1 x\right) + \left(C_n^2 - C_n^3 x\right)x^2 + \ldots + \left(C_n^{2m-2} - C_n^{2m-1} x\right)x^{2m-2}.$$

Встановимо знак кожної різниці для $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$.

$$1 - C_n^1 x = 1 - nx \geq 1 - n\frac{1}{n} = 0;$$

$$C_n^2 - C_n^3 x = \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x = \frac{n(n-1)}{3!}\left(3 - (n-2)x\right) \geq$$

$$\geq \frac{n(n-1)}{3!}\left(3 - (n-2)\frac{1}{n}\right) = \frac{2(n+1)(n-1)}{3!} \geq 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n^{2m-2} - C_n^{2m-1} x = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-2m+3)}{(2m-2)!} - \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-2m+3)(n-2m+2)}{(2m-1)!}x =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-2m+3)}{(2m-1)!}\left(2m-1-(n-2m+2)x\right) \geq$$

$$\geq \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-2m+3)}{(2m-1)!}\left(2m-1-(n-2m+2)\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{2(m-1)(n+1)(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-2m+3)}{(2m-1)!} \geq 0.$$

З урахуванням отриманих нерівностей маємо нерівність $P_{2m-1}(x) \geq 0$ для $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$. Якщо $k = 2m$, то $P_{2m}(x) = P_{2m-1}(x) + C_n^{2m}x^{2m} \geq 0$. Отже, $P_k(x) \geq 0$ для всіх $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ і $k = 1, 2, \ldots, n$. **6.** Побудуємо рекурентну послідовність (x_n), у якої $x_1 \neq 2$, а $x_{n+1} = \dfrac{4}{2 - x_n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Виразимо всі члени послідовності, починаючи з другого, через x_1

$$x_2 = \frac{4}{2 - x_1},\ x_3 = \frac{4}{2 - x_2} = \frac{2x_1 - 4}{x_1},\ x_4 = \frac{4}{2 - x_3} = x_1.$$

Зрозуміло, що побудована послідовність є періодичною послідовністю з періодом 3. Нехай функція f – розв’язок рівняння. Тоді для $x = x_1, x = x_2, x = x_3$ виконуються такі рівності:

$$\begin{cases} f(x_1)+f\left(\dfrac{4}{2-x_1}\right)=x_1, \\ f(x_2)+f\left(\dfrac{4}{2-x_2}\right)=x_2, \\ f(x_3)+f\left(\dfrac{4}{2-x_3}\right)=x_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1)+f\left(x_2\right)=x_1, \\ f(x_2)+f\left(x_3\right)=x_2, \\ f(x_3)+f\left(x_1\right)=x_3. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $f(x_1)=\dfrac{1}{2}\left(x_1-x_2+x_3\right)$ або $f(x_1)=\dfrac{1}{2}\left(x_1-\dfrac{4}{2-x_1}+\dfrac{2x_1-4}{x_1}\right)$. Перевіркою встановлюємо, що функція $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{2x-4}{x}\right)$ є розв'язком рівняння. **7.** Ліва частина рівняння є квадратним тричленом відносно параметра a. Тому рівняння запишемо так:

$$a^2-2a(x^2-5x-1)+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0.$$

Оскільки його дискримінант невід'ємний: $D=(x-1)^2\ge 0$, то маємо рівняння $a^2+10a+25=0$, якщо $x=1$, і $(a-x^2+6x)(a-x^2+4x+2)=0$ в іншому разі. У першому випадку $a=-5$ і дане рівняння набуває вигляду

$$x^4-10x^3+32x^2-38x+15=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)(x-5)=0.$$

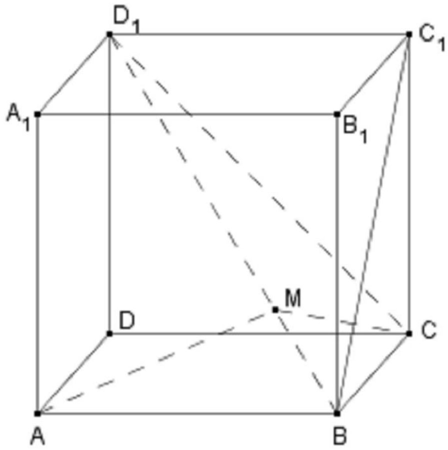
Звідси маємо 4 корені рівняння: $1,1,3$ і 5. У випадках, коли $a\ne 5$ маємо сукупність квадратних рівнянь $x^2-6x-a=0$ і $x^2-4x-2-a=0$, яку пропонуємо розв'язати самостійно. Розв'язки даного рівняння, залежно від параметра, наведені нижче.

a	x
$(-\infty;-9)$	ðî çâ'ÿçê³â í åì à°
-9	$3;3$
$(-9;-6)$	$3\pm\sqrt{9+a}$
-6	$3\pm\sqrt{2},2,2$
-5	$1,1,3,5$
$(-6;-5),(-5;+\infty)$	$3\pm\sqrt{9+a},3\pm\sqrt{6+a}$

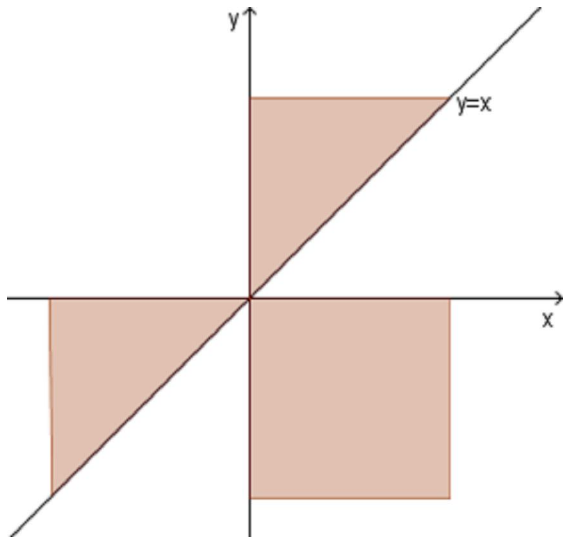
8. Шуканий двогранний кут A,BD_1,C_1 і двогранний кут A,BD_1,C – суміжні (мал. 85). Тому сума їх лінійних кутів дорівнює $180°$. Визначимо лінійний кут α двогранного кута A,BD_1,C. У гранях цього кута містяться рівні прямокутні трикутники BAD_1 і BCD_1. Якщо $AM\perp BD_1$, то $CM\perp BD_1$. Тому $\angle AMC=\alpha$ – лінійний кут двогранного кута A,BD_1,C. За теоремою косинусів

$$\cos\alpha=\frac{AM^2+MC^2-AC^2}{2AM\cdot MC}=\frac{2AM^2-2a^2}{2AM^2},$$

де a – ребро куба. Оскільки $AM^2 = \frac{2}{3}a^2$, то $\cos\alpha = \frac{\frac{4}{3}a^2 - 2a^2}{\frac{4}{3}a^2} = -\frac{1}{2}$. Тому $\alpha = 120°$, а шуканий кут дорівнює $60°$.



Мал. 85



Мал. 86

9. Доведення нерівності проведемо способом послаблення з залученням співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним та властивістю модуля дійсного числа.

$$\frac{3}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)+24 = \frac{a^4+16}{2}+\frac{b^4+16}{2}+\frac{c^4+16}{2}+a^4+b^4+c^4 \geq$$
$$\geq \sqrt{16a^4}+\sqrt{16b^4}+\sqrt{16c^4}+a^4+b^4+c^4 =$$
$$= 4a^2+4b^2+4c^2+a^4+b^4+c^4 = 2\left(\frac{4a^2+c^4}{2}+\frac{4b^2+a^4}{2}+\frac{4c^2+b^4}{2}\right) \geq$$
$$\geq 2\left(\sqrt{4a^2c^4}+\sqrt{4b^2a^4}+\sqrt{4c^2a^4}\right) = 4\left(|a|c^2+|b|a^2+|a|b^2\right) \geq$$
$$\geq 4\left(ac^2+ba^2+cb^2\right).$$

10. Виконаємо наступні рівносильні перетворення рівняння:

$$\left(\overline{xy}\right)^2+\left(\overline{yx}\right)^2 = 2005 \Leftrightarrow \left((10x+y)+y\right)^2+\left((10y+x)+x\right)^2 = 2005 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 99(x^2-y^2) = 2005.$$

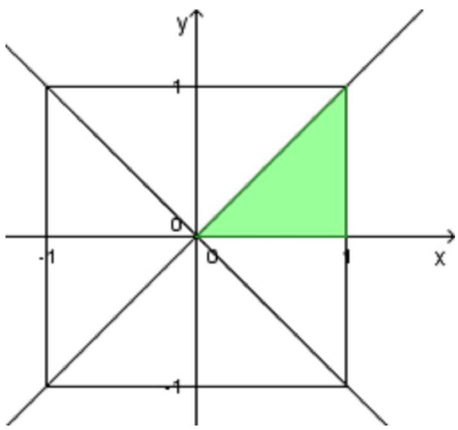
Одержане рівняння не має цілих розв’язків, бо його права частина не ділиться без остачі на 99. **11.** Оскільки

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y} \geq \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{y-x}{xy} \geq 0,$$

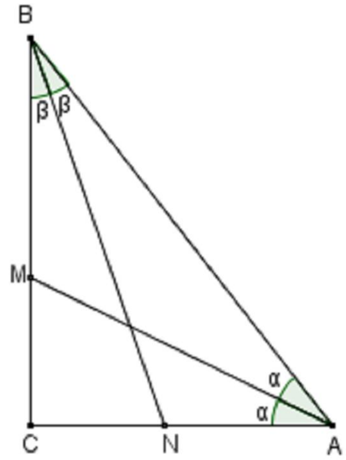
то дана нерівність рівносильна такій сукупності систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le y,\\ xy > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge y,\\ xy < 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Множину точок, координати яких задовольняють нерівності систем сукупності зображено на мал. 86. **12.** Нехай $k>1$ – натуральне число таке, що $3^n+5^n=k(3^{n-1}+5^{n-1})$. Тоді рівність $5^{n-1}(5-k)=3^{n-1}(k-3)$ може виконуватися тільки за умови, що $k=4$, а $5^{n-1}=3^{n-1}$. Звідси $n=1$. **13.** Оскільки $P(x,y)=P(-x,y)=P(x,-y)=P(y,x)$, де $P(x,y)=|x+y|+|x-y|$, то задана множина точок симетрична відносно координатних осей і бісектрис координатних кутів. Якщо $0\le y\le x$, то $x\le 1$, і множина точок, координати яких задовольняють нерівність $0\le y\le x\le 1$, є трикутником з вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$ і $(1;1)$. Тому нерівність $|x+y|+|x-y|\le 2$ задає квадрат зі стороною 2 (мал. 87), а його площа дорівнює 4. $1-2x+2x^2$ набувають в точці $\frac{1}{2}$.



Мал. 87



Мал. 88

14. Позначимо вираз через $P(x,y)$. З урахуванням умови $x+y=1$ він запишеться так:

$$P(x,1-x)=1-3x+3x^2-\frac{1}{1-2x+2x^2}.$$

Різниця буде найменшою, якщо одночасно зменшуване найменше, а від'ємник – найбільший. Найменше значення квадратні тричлени $1-3x+3x^2$ і $1-2x+2x^2$ набувають в точці $\frac{1}{2}$. Тому $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-1\frac{3}{4}$ – найменше значення.

15. Поділимо першу рівність на xy, другу – на yz і одержані рівності додамо:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y}-\frac{y}{x}+\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=\frac{x}{y}+\frac{z}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}-1\right)+\left(\frac{y}{x}+1-\frac{y}{z}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-z, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}. \end{array}\right.$$

Якщо $y=-z$, то з рівності $y^2-z^2=xz$ випливає, що $xz=0$, а це суперечить умові задачі. Тому повинна виконуватися рівність

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \Leftrightarrow z=\frac{xy}{x+y}.$$

Далі, враховуючи задані рівності й отриману, знаходимо

$$x^2-z^2=(x^2-y^2)+(y^2-z^2)=yz+xz=(x+y)z=xy.$$

16. Нехай AM і BN бісектриси гострих кутів (мал. 88). Покладемо

$$AC=a, BC=b, AM=x, BN=y, \ \angle BAM=\angle MAC=\alpha, \angle ABN=\angle NBC=\beta.$$

Тоді $\alpha+\beta=45°$, а $tg2\alpha=\dfrac{b}{a}, \cos\alpha=\dfrac{a}{x}, \ \ \cos\beta=\dfrac{b}{y}; \ \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{x}{y}$. З умови задачі випливає, що числа $p=tg2\alpha$ і $q=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ є раціональними. Крім того, з рівності $\cos\beta=\cos(45°-\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)$ і останньої рівності, наведеного вище ланцюжка рівностей, маємо

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+tg\alpha\right), \ tg\alpha=\sqrt{2}q-1, \ \ p=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\left(\sqrt{2}q-1\right)}{1-\left(\sqrt{2}q-1\right)^2}.$$

Звідси $\sqrt{2}\left(pq-q\right)=pq^2-1$. Через те, що числа $pq-q, \ pq^2-1$ – раціональні, а число $\sqrt{2}$ – ірраціональне, то остання рівність може виконуватися тільки тоді, коли $pq-q=pq^2-1=0$. Тому $p=1, \ 2\alpha=45°$. Отже, трикутник рівнобедрений, і його гострі куди дорівнюють $45°$. **17.** Зрозуміло, що x – невід'ємне ціле число. Якщо $x=0$, то й $y=0$. Якщо $x>0$, то y – непарне ціле число. Нехай $y=2z-1$, де z – ціле число. Тоді рівняння запишеться так: $2^{x-2}=3z(z-1)+1$. Звідси випливає, що $x=2$, а $z=0$ або $z=1$. Тому $(0;0),(2;\pm1)$ – шукані розв'язки рівняння. **18.** Виконавши спочатку заміну $x-2005=t$, а потім $1-t\to t$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2005f(1-t)+2006f(t)=t^2, \\ 2005f(t)+2006f(1-t)=(1-t)^2, \end{cases}$$

з якої нескладно знайти $f(t)=\frac{1}{4011}(t^2+4010t-2005)$. Перевірка підтверджує правильність визначення функції. **19.** Складемо куб довільним чином. Нехай на його поверхні буде a білих і b чорних квадратів. Зрозуміло, що $a+b=24$. Розглянемо число $x=a-b$. Воно парне. Якщо $x=0$, то $a=b$, і задача розв'язана. В іншому разі поворот одного з кубиків на кут $90°$ відносно однієї з осей, що проходить через центри протилежних граней, залишає число x незмінним або змінює його на 2. За три такі операції можна досягти, щоб грані кубика, які були на поверхні куба сховалися всередину, а ті, що були всередині, опинилися на поверхні. За 24 такі операції число x дорівнюватиме $(24-a)-(24-b)=b-a=-(a-b)$, тобто стане протилежним початковому значенню. Отже, на якомусь кроці воно дорівнюватиме нулю.

XI КЛАС

1. $-7,-3$. *Вказівка:* Виконайте заміну: $x+5=t$. **2.** Помножимо другу рівність на 2 і віднімемо від першої.

$$x^2+y^2+z^2-2xz+2xy-2yz=0\Leftrightarrow(x+y-z)^2=0\Rightarrow z=x+y.$$

Після цього з другої рівності дістанемо

$$x^2+xy+y^2=4\Leftrightarrow y^2+xy+(x^2-4)=0.$$

Здобута рівність може виконуватися тільки за умови, що

$$x^2-4(x^2-4)\ge 0\Leftrightarrow 3x^2\le 16\Leftrightarrow |x|\le\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

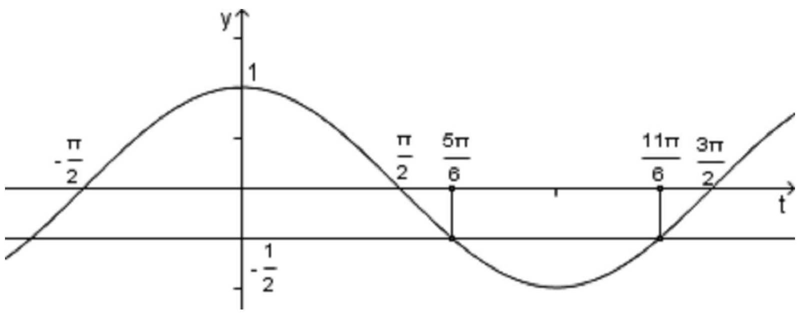
3. *Вказівка:* дивись задачу 6 для X класу. **4.** $n+2$. **5.** $\pm\sqrt{2}$. Уведемо нову змінну $t=3x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ і знайдемо ті значення параметра m, для яких рівняння

$$\cos^2 t+(2m^2-3{,}5)\cos t+m^2-2=0$$

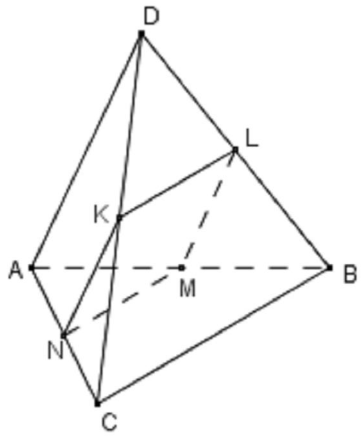
на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ має точно 5 розв'язків. Нескладно переконатися, що це рівняння рівносильне такій сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\cos t=-\frac{1}{2},\\ \cos t=4-2m^2.\end{array}\right.$$

Далі вдамося до графічного способу розв'язування рівнянь. Для цього побудуємо графік функції $y=\cos t$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ (мал. 89). Перше рівняння сукупності на цьому проміжку має два розв'язки $\frac{5\pi}{6}$ і $\frac{11\pi}{6}$. Тільки за умови, що $4-2m^2=0$, друге рівняння має три розв'язки: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$. Звідси $m=\pm\sqrt{2}$.



Мал. 89



Мал. 90

6. Якщо в піраміді $ABCD$ (мал. 90) ребра AD і CB рівні, а KL і NM – середні лінії трикутників CDB і CAB відповідно, то чотирикутник $KLMN$ – ромб. Нехай $AD \neq CB$. У цьому випадку $KLMN$ – паралелограм. Будемо переміщувати площину $KLMN$ паралельно прямим AD і BC до тих пір, поки не буде виконуватися умова

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{DK}{DC}=\frac{DL}{DB}=\lambda.$$

При цьому відрізки KL і NM, KN і LM залишатимуться паралельними. Тому при деякому значенні λ паралелограм $KLMN$ перетвориться у ромб. **7.** Виконаємо рівносильні перетворення рівняння.

$$2x^4+2y^4=4xy-1 \Leftrightarrow 2x^4+2y^4-4x^2y^2=-4x^2y^2+4xy-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-y^2\right)^2+\left(2xy-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy-1=0, \end{cases} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

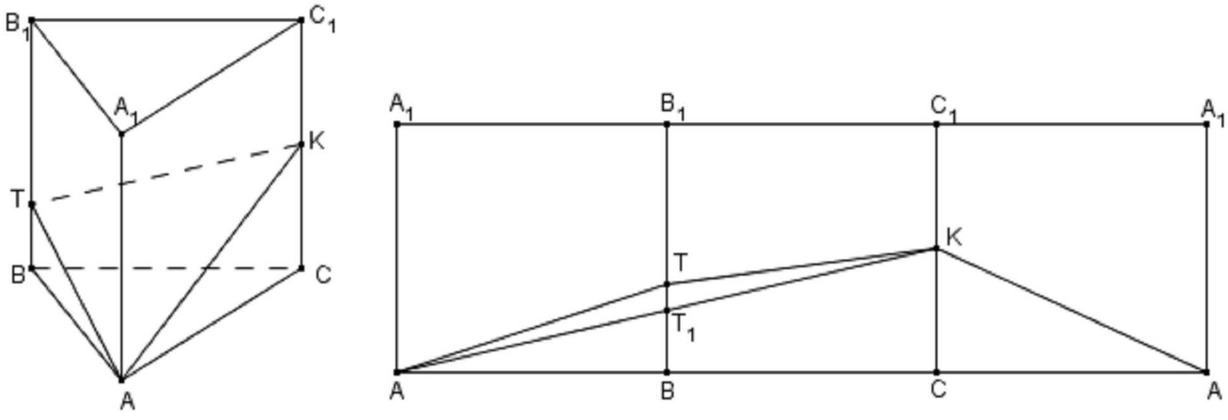
8. Нехай x – кількість перемог, одержаних чоловіками над жінками у турнірі. Тоді кількість перемог, одержаних окремо чоловіками і окремо жінками дорівнює $\frac{2n(2n-1)}{2}+x$ і $\frac{n(n-1)}{2}+2n^2-x$ відповідно. Враховуючи умову задачі, дістаємо рівняння

$$7\left(\frac{2n(2n-1)}{2}+x\right)=5\left(\frac{n(n-1)}{2}+2n^2-x\right) \Rightarrow x=\frac{3n-n^2}{8}.$$

Оскільки x – ціле невід'ємне число, n – натуральне число, то $x=0$, а $n=3$. **9.** З умови випливає, що площина перерізу перетинає ребро BB_1 у деякій точці T. Зробивши розгортку бічної поверхні (мал. 91) призми $ABCA_1B_1C_1$, маємо периметр p трикутника AKT:

$$p=AT+TK+KA \geq AK+KA,$$

При цьому рівність досягається за умови, що $T = T_1$, де T_1 точка перетину відрізків AK і BB_1. Неважко помітити, що $T_1B = \frac{1}{2}KC = \frac{1}{4}CC_1 = \frac{1}{4}BB_1$, тобто $B_1T_1 : T_1B = 3:1$.



Мал. 91

10. 18037. Якщо $y = 0$, то $f(x + g(0)) = 2x + 5$. Виконаємо заміну $x + g(0) = t$. Дістанемо рівність $f(t) = 2t - 2g(0) + 5$, яка виконується для всіх t. Зокрема, для $t = 0$ маємо $f(0) = -2g(0) + 5$. Враховуючи, що $f(0) = 2005$, визначаємо $g(0) = -1000$ і знаходимо $f(t) = 2t + 2005$. Далі проводимо потрібні обчислення. **11.** Нехай усі множники лівої частини нерівності невід'ємні. Увівши нові змінні $a = x + y - z, b = y + z - x, c = z + x - y$, нерівність запишемо так:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \ge abc.$$

Оскільки $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, \frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc}, \frac{c+a}{2} \ge \sqrt{ca}$, то перемножуючи ці нерівності, завершуємо доведення даної нерівності. Якщо один з множників лівої частини даної нерівності від'ємний, то нерівність очевидна. Інших випадків бути не може. Припустимо, що $x + y - z < 0, y + z - x < 0$. Тоді, додаючи ці нерівності, прийдемо до нерівності $2y < 0$, що суперечить умові задачі. Якщо зробити припущення, що $x + y - z < 0$, $y + z - x < 0$, $z + x - y < 0$, то після додавання нерівностей знову прийдемо до суперечності $x + y + z < 0$. **12.** $x \in \left[-3; 3\sqrt{3}\right]$. Областю допустимих значень змінної x є проміжок $\left[-3; 3\sqrt{3}\right]$. Доведемо, що всі значення змінної x з цього проміжку є розв'язками нерівності. Нескладно переконатися, що найменше значення лівої частини нерівності для $x \in [3; 0)$ більше за $\sqrt{3}$, а найменше значення правої – не більше $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{9-x} > 0 + \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}, \ \sqrt[6]{27 - x^2} \le \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}.$$

Тому всі $x \in [-3; 0)$ є розв'язками нерівності. Аналогічно установлюється, що всі $x \in \left[0; 3\sqrt{3}\right]$ також є розв'язками нерівності. **13**. З урахуванням умови $x + y = 1$ вираз запишеться так:

$$P(x, 1-x) = 1 - 3x + 3x^2 + \frac{1}{1 - 2x + 2x^2} \Leftrightarrow P(x, 1-x) = \frac{1}{2}\left(6x^2 - 6x + 3\right) + \frac{3}{6x^2 - 6x + 3} - \frac{1}{2}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2}\left(6x^2 - 6x + 3\right) + \frac{3}{6x^2 - 6x + 3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(6x^2 - 6x + 3\right) \cdot \frac{3}{6x^2 - 6x + 3}} = \sqrt{6},$$

то $P(x, 1-x) \geq \sqrt{6} - 0{,}5$. Тому $\sqrt{6} - 0{,}5$ – найменше значення виразу $P(x, y)$ і досягається воно, коли

$$\frac{1}{2}\left(6x^2 - 6x + 3\right) = \frac{3}{6x^2 - 6x + 3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{6\sqrt{6} - 9}}{6},\ y = \frac{3 \mp \sqrt{6\sqrt{6} - 9}}{6}.$$

14.. Якщо трійка чисел x, y, z є розв'язком системи, то можливі три випадки: всі числа рівні, тільки два з чисел рівні, всі числа різні. 1) Нехай $x = y = z$. Тоді система трьох рівнянь вироджується в одне рівняння $x^2 = 1$. У цьому випадку система має два розв'язки: $\pm 1, \pm 1, \pm 1$. 2) Якщо $x \neq y = z$, то приходимо до системи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = y^2 + 1, \\ 2y^2 = xy + 1, \\ y^2 + x^2 = xy + 1, \end{cases}$$

яка не має розв'язків. 3) У випадку $x \neq y \neq z \neq x$ система несумісна. Щоб переконатися у цьому, у даній системі послідовно віднімемо рівняння одне від одного. Після очевидних тотожних перетворень дістанемо таку систему:

$$\begin{cases} (x - z)(x + z) = z(y - x), \\ (y - x)(y + x) = x(z - y), \\ (z - y)(z + y) = y(x - z). \end{cases}$$

Будемо вважати, що $x < y < z$. Якщо $0 \leq x < y < z$ або $x < 0 < y < z$, то третє рівняння системи не має розв'язків, бо $0 < (z - y)(z + y) = y(x - z) < 0$. У разі, коли $x < y < 0 < z$, перемножимо всі рівняння останньої системи. Отримане рівняння $(x + y)(y + z)(z + y) = xyz$ також не має розв'язків, бо його права частина додатна, а ліва – від'ємна: $x + y < 0$, а $(y + z)(z + x) > 0$ для від'ємних x, y і додатного z. Випадок, коли $x < y < z < 0$ пропонуємо дослідити самостійно. **15**. Нехай $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$. Нескладно переконатися, що $P(x, y) = P(-y, x - y) = P(y - x, -x)$. Тому, якщо (m, k) – цілочисловий розв'язок рівняння, то й пари чисел $(-k, m - k)$, $(k - m, -m)$ також цілочислові розв'язки рівняння. **16.** *Так, існує*. Зокрема, такою є функція

$$y = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\dfrac{1}{x}, \text{ ÿêù î } \tilde{o} \neq 0, \\ 0, \text{ ÿêù î } \tilde{o} = 0. \end{cases}$$

У точці $x = 0$ функція зростає, бо її похідна додатна:

$$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 + 2x \sin\frac{1}{x}\right) = 1 > 0 .$$

Якщо $x \neq 0$, то похідна $y'(x) = 1 + 4x \sin\dfrac{1}{x} - 2\cos\dfrac{1}{x}$ знакозмінна в кожному околі точки $x = 0$, а тому не є монотонною. **17.** Спочатку знайдемо функцію f. Оскільки $f(x + y) = f(y + x)$ для будь-яких $x, y \in \mathbf{R}$, то

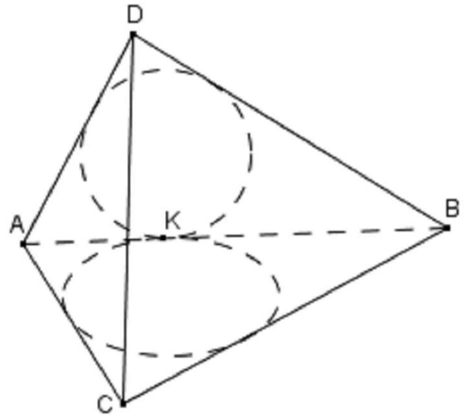
$$f(x) + 2^{|x|} f(y) = f(y) + 2^{|y|} f(x) \;\Leftrightarrow\; f(y) - 2^{|x|} f(y) = f(x) - 2^{|y|} f(x) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(1 - 2^{|x|}\right) f(y) = \left(1 - 2^{|y|}\right) f(x) \;\Rightarrow\; \frac{f(y)}{\left(1 - 2^{|y|}\right)} = \frac{f(x)}{1 - 2^{|x|}}, \; x \neq 0, \; y \neq 0 .$$

Остання рівність можлива тільки за умови, що ліва частина рівності не залежить від y, а права – від x, тобто вони є деякою постійною величиною:

$$\frac{f(x)}{1 - 2^{|x|}} = c, \; x \neq 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = c\left(1 - 2^{|x|}\right), \; x \neq 0 .$$

З умови $f(1) = 1$ знаходимо $c = -1$. Нескладно переконатися, що $f(0) = 0$, тому $f(x) = 2^{|x|} - 1$ для всіх $x \in \mathbf{R}$. Переконавшись перевіркою, що функція є шуканою, будуємо її графік. **18.** Нехай кола, вписані в грані ABC і ABD тетраедра $ABCD$ дотикаються до ребра AB у спільній точці K (мал. 92). Це означає, що $BK = \dfrac{1}{2}(AB + BD - AD)$ і $BK = \dfrac{1}{2}(AB + BC - AC)$. Звідси отримуємо рівність $AD + BC = AC + BD$, яка є умовою того, що вписані у грані ABC і ABD кола дотикаються одне одного. Нескладно переконатися, що такою ж буде умова дотику кіл, вписаних у грані ADC і BDC. **19.** Очевидно, що будь-які три вершини правильного п'ятикутника є вершинами рівнобедреного трикутника. Утворимо правильні п'ятикутники $A_1 A_{402} A_{803} A_{1204} A_{1605}$, $A_2 A_{403} A_{804} A_{1205} A_{1606}, \ldots,$ $A_{401} A_{802} A_{1203} A_{1604} A_{2005}$. Оскільки в многокутнику чорних вершин 805, а утворених п'ятикутників 401 і $805 > 2 \cdot 401$, то в якомусь правильному п'ятикутнику є три чорні вершини. Вони й будуть вершинами рівнобедреного трикутника.



Мал. 92

2006 – 2007 навчальний рік

VII КЛАС

1. Якщо число n ділиться на 9 з остачею 1 або 8, то його можна записати так: $n = 9k \pm 1$, де k – ціле невід'ємне число. Тоді

$$n^2 = 81k^2 \pm 18k + 1 = 9(9k^2 \pm 2k) + 1,$$

тобто 1 – остача від ділення квадрата цього числа на 9. **2.** Послідовно обчисливши різниці

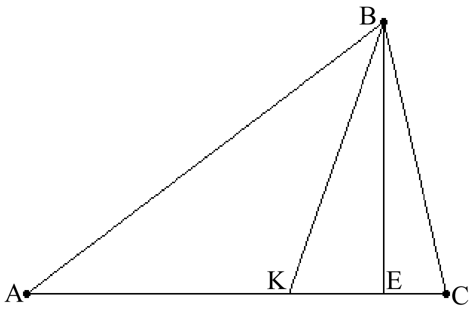
$$2^{2006} - 2^{2005} = 2^{2005}(2-1) = 2^{2005};\ 2^{2005} - 2^{2004} = 2^{2004};\ \ldots,\ 2^3 - 2^2 = 2;\ 2^2 - 2^1 = 2,$$

отримаємо 1. **3.** Запустивши одночасно обидва годинники, зупиняємо (повернувши боком) 11-хвилинний тоді, коли пройде 7 хвилин. Тепер в них залишилося піску на 4 хвилини. 15 хвилин можна відміряти, поставивши спочатку ці 4 хвилини, а потім перевернувши 11-хвилинний годинник. **4.** Оскільки 2006! ділиться на 9, то після усіх цих операцій отримаємо саме цифру 9. **5.** Позначимо через C число, що складає 2% від половини числа B. Тоді $B = 0{,}01A,\ \ C = 0{,}02 \cdot \dfrac{B}{2} = 0{,}0001A$. Рівність $C = 0{,}0001A$ означає, що число A треба зменшити в 0,0001 раз. **6.** *75 км*. Якщо S – довжина всього шляху, то дістаємо рівняння $0{,}3S + 0{,}4(S - 0{,}3S) = 0{,}5S + 6$. Звідси знаходимо $S = 75$. **7.** а) *8 грн.* б) *19 грн.* Позначимо через l, m і t вартість 1 склянки лимонаду, 1 порції морозива й 1 тістечка відповідно. Тоді маємо два рівняння: $l + 3m + 7t = 14$ і $l + 4m + 10t = 17$, з яких випливає, що $m + 3t = 3$. Нескладно переконатися, що 3 склянки лимонаду, 12 порцій морозива і 30 тістечок коштують 51 гривню, а 4 склянки лимонаду, 12 порцій морозива і 28 тістечок – 56 гривень, тобто $3l+12m+30t=51$, $4l+12m+28t=56$. Звідси дістаємо таку рівність: $l-2t=5$. З рівностей $m+3t=3$ і $l-2t=5$ знаходимо $l+m+t=8$, а $2l+3m+5t=19$. **8.** Зрозуміло, що зменшуване закінчується цифрою 0. Для визначення останньої цифри від'ємника зауважимо, що степені числа 3 з показниками 1, 2, 3 і 4 закінчуються цифрами 3, 9, 7 і 1 відповідно. Оскільки від'ємник є степенем числа 3 з показником 21, а $21=4\cdot5+1$, то 7 – остання цифра від'ємника. Тому різниця закінчується цифрою 7. **9.** Рівняння рівносильне такому: $(2-b)x=4-4a$. Звідси $x=\dfrac{4-4a}{2-b}$ за умови, що $b\neq2$. Якщо $b=2$ і $a=1$ то будь-яке число є розв'язком рівняння. У разі, коли $b=2$ і $a\neq1$, рівняння розв'язків не має.

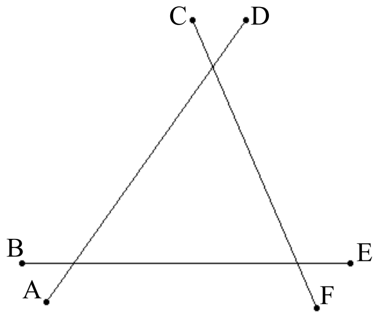
10. $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=(100a+10b+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b)=$

$$=111a+111b+111c=111(a+b+c).$$

11. Число повинне ділитися одночасно і на 3, і на 11. На 3 діляться числа 111, 111111, 111111111,… , а на 11 –числа 11, 1111, 111111, 11111111, … . Зрозуміло, що найменшим числом, яке ділиться без остачі на 33, є число 111111. **12.** Нехай є достатня кількість білих і чорних одиничних кубиків. Складемо з них куб з ребром 3 так, щоб одиничні кубики, що мають суміжні грані були різного кольору. Якщо центральний кубик білий, то куб складено з 13 білих і 14 чорних кубиків. Зрозуміло, що миша, з'ївши кубик одного кольору, починає їсти кубик іншого кольору. Тому проміж 26 з'їдених кубиків було порівну білих і чорних. Отже, 27-й, тобто центральний, має бути чорним. Прийшли до суперечності. **13.** Позначимо через S довжину шляху до школи, k – довжину кроку високого учня, n – кількість його кроків до школи. Тоді $S=kn$, $0{,}8k$ – довжина кроку низького учня, $1{,}2n$ – кількість кроків низького учня, які він зробив за час, протягом якого високий учень дійшов до школи. Шлях s, який здолав за цей час низький учень дорівнює $0{,}8k\cdot1{,}2n=0{,}96kn=0{,}96S$. Отже, першим до школи прибув високий учень. **14.** Якщо x і y перша і друга частини шляху, то $x+y$ *км* – весь шлях, а $y+x$ *хв.* – час, затрачений на цей шлях. Тому середня швидкість руху автомобіля складає 1 *км/хв*. **15.** $1/2$. Оскільки інші дерева у лісі складали 1%, а після вирубування їх стало б 2% , тобто удвічі більше, то для цього треба вирубати половину сосен. **16.** *Чисел, які містять цифру 7, більше.* Вдамося до підрахунків. Найменше семицифрове число – 1000000, а найбільше – 9999999. Тому всіх семицифрових чисел $9\cdot10^6$. Кількість семицифрових чисел, у яких не використовується цифра 7, складає $8\cdot9^6$. Залишається переконатися, що $9\cdot10^6-8\cdot9^6>8\cdot9^6$. **17.** $40°$. Нехай $\angle BAK=\alpha, \angle ABK=\angle KBC=\beta, \alpha+\beta=70°$ (мал. 93). Якщо $\angle BCE=\gamma$, то з трикутника BKC маємо $\beta+\gamma=180°-70°=110°$. Далі знаходимо $\gamma-\alpha=40°$.



Мал. 93

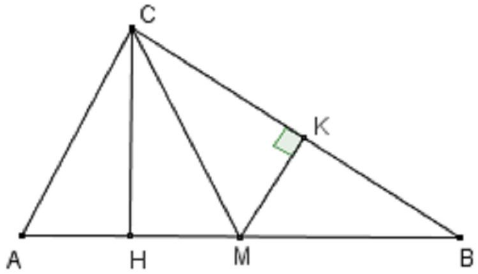


Мал. 94

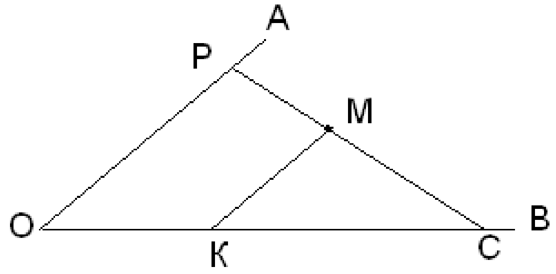
18. Схема розміщення фортець A, B, C, D, E, F може бути такою як показано на мал. 94. **19.** Якби один пірат за один раз переносив одну скриню, то за версією капітана, скринь повинно бути 6500. Але одну скриню переносило 7 піратів, тому скринь повинно бути у сім разів менше, тобто 6500:7. Оскільки 6500 не ділиться без остачі на 7, то припущення капітана помилкове. **20.** 3. Нехай *a, b, c, d* – кількість дітей відповідного віку. Тоді $a+b+c+d=23$ і $c=1{,}5d$. Звідси маємо рівність $2(a+b)+5d=46 \Leftrightarrow d=9+\frac{1-2(a+b)}{5}$, яка буде виконуватися тільки тоді, коли сума $a+b$ набуває значень 3, 8, 13, 18. За цих умов d дорівнюватиме 8, 6, 4, 2, а c – 12, 9, 6, 3 відповідно. Використовуючи рівність $10a+11b+12c+13d=253$, знаходимо $c=3$. **21.** *Виграє Андрійко.* Для цього йому потрібно насамперед поновити цифри 4 і 6, а далі використати центральну симетрію відносно осі стрілок.

VIII КЛАС

1. $1\frac{1}{2}$ *год*. Перший фонтан за одну годину наповнює $\frac{2}{5}$, а другий $\frac{4}{15}$ басейна. Разом за 1 годину вони наповнять $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ басейна, а повністю він наповниться за півтори години. **2.** Нехай точки M і H – основи медіани і висоти трикутника відповідно (мал. 95). Тоді $AH=HM, BM=AM=2HM$. З точки M опустимо перпендикулярно MK на сторону CB. З рівності трикутників CHM і CKM випливає, що $KM=HM$. Оскільки в прямокутному трикутнику BKM гіпотенуза BM удвічі більша за катет KM, то $\angle B=30°$, а $\angle BMK=60°$. Нескладно переконатися, що $\angle CMH=60°$ і $\angle A=60°$. Отже, трикутник прямокутний, а його гострі кути – $30°$ і $60°$.



Мал. 95



Мал. 96

3. Проведемо через точку M промінь, паралельний стороні OA, що перетинає сторону OB в точці K (мал. 96). Відкладемо на стороні OB відрізок KC такий, що $\frac{OK}{KC}=\frac{2}{3}$. Проведемо промінь CM, що перетне сторону OA в точці P. За теоремою про пропорційні відрізки точка M ділить відрізок PC у відношенні 2:3. Отже, PC – шуканий відрізок. **4.** Нехай x – третя, а y – остання цифри числа. Оскільки воно ділиться на 198, то має одночасно ділитися на 2, 9 та 11. Звідси випливають умови, яким підпорядковані цифри x та y: y – парна цифра, $(8+4+x+5+y)\vdots 9$, $\left((8+x+y)-(4+5)\right)\vdots 11$. З другої умови випливає, що $x+y=1$ або $x+y=10$. У першому випадки третя умова виконується, у другом – ні. Отже, $x+y=1$, а $y=0$, $x=1$ – невідомі цифри даного числа. **5.** $\frac{3}{2}$. Оскільки всі доданки лівої частини рівняння невід'ємні, то рівняння рівносильне такій системі рівнянь:

$$\begin{cases}\left(2x^2-5x+3\right)^6=0,\\ \left(2x^2-5x+3\right)^6\left(2x^2+x-6\right)^2=0,\\ \left(2x^2+x-6\right)^4=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=0,\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)(x+2)=0,\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)=0,\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

6. $10^{16}=10^8\cdot10^8>2^8\cdot10^8=20^8$. **7.** Перший гравець повинен з'їсти 21 цукерку, а 20 цукерок розкласти на 2 купки з непарною кількістю цукерок. Тоді другий гравець, як би він не грав, залишить першому 2 купки: з парною та непарною кількістю цукерок. Перший знов, з'ївши непарну кількість цукерок, робить з парної дві непарних. Коли він таким чином зробить 2 купки по одній цукерці, другий програє. **8.** Нехай многочлен є добутком двох квадратних тричленів:

$$2x^4+3x^3-3x^2+3x-1=(2x^2+bx+c)(x^2+px+q),$$

де b, c, p, q – деякі цілі числа. Звідси маємо рівність двох многочленів:

$$3x^3-3x^2+3x-1=(b+2p)x^3+(c+bp+2q)x^2+(bq+cp)x+cq,$$

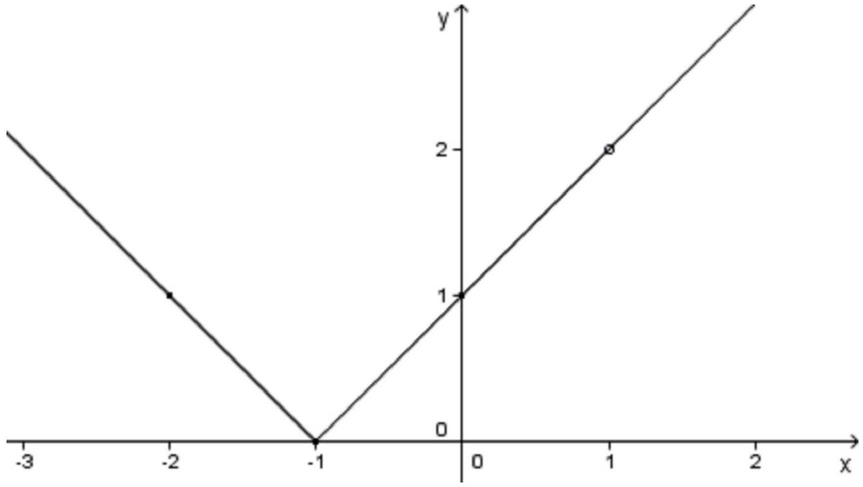
яка можлива тільки за умови, що коефіцієнти біля однакових степенів змінної x рівні:

$$\begin{cases} b+2p=3, \\ c+bp+2q=-3, \\ bq+cp=3, \\ cq=-1. \end{cases}$$

Нескладно переконатися, що на множині цілих чисел система має єдиний розв'язок: $b=-1, c=1, p=2, q=-1$. Тому многочлен розкладається на такий добуток: $(2x^2-x+1)(x^2+2x-1)$. **9.** 1002, 999. Розв'яжемо рівняння способом розкладу на множники лівої частини рівняння за умови, що права частина є цілим числом:

$$x^2-y^2-4y=2007 \Leftrightarrow x^2-(y+2)^2=2003 \Leftrightarrow (x-y-2)(x+y+2)=2003 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-2=1, \\ x+y+2=2003, \end{cases} \Rightarrow x=1002,\ y=999.$$



Мал. 97

10. Графік функції збігається з графіком (мал. 97) функції $y=|x+1|$ за умови, що $x \neq 1$. **11.** З умови задачі випливає дві рівності:

$$\begin{cases} 10a+8b+22c=0, \\ 3b+2c=5n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a=-8b-22c=0, \\ 2c=5n-3b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a=25b-55n, \\ 2c=5n-3b, \end{cases}$$

де n – ціле число. Тоді, виконуючи перетворення, отримаємо:

$$10a+3b+2c=(25b-50n)\vdots 25.$$

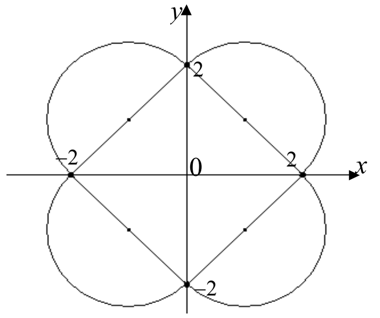
12. За умовою задачі $a=0{,}01b$. Нехай a змінили в k разів так, що

$$\frac{b-ka}{2}=0{,}1\frac{b+ka}{2} \Leftrightarrow b-0{,}01kb=0{,}1(b+0{,}01kb) \Rightarrow k=\frac{900}{11}.$$

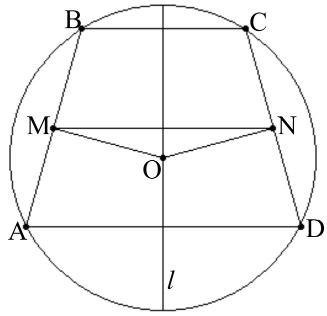
Отже, число a потрібно збільшити в $\frac{900}{11}$ раз. **13.** Насамперед зауважимо, що діагоналі опуклого чотирикутника завжди перетинаються у внутрішній точці цього чотирикутника. Оскільки за умовою задачі жодні три точки не лежать на одній прямій, то завжди знайдуться чотири точки проміж заданих п'яти, які є кінцями двох відрізків, що перетинаються. Ці точки будуть вершинами опуклого чотирикутника. **14.** Нехай гирі, маси яких $m_1, ..., m_6, m_7, ..., m_{12}$, розкладені на шальках терезів так, що $m_1 + ... + m_6 = m_7 + ... + m_{12}$, а m_{13} – маса тринадцятої гирі. Зрозуміло, що сумарна маса $m_1 + ... + m_6 + m_7 + ... + m_{12}$ є парним числом. Тому кожне число $m_1, ..., m_{12}$ є числом такої ж парності, як і число m_{13}. Тобто маси всіх тринадцяти гир виражаються числами однакової парності. Якщо m_{13} – парне число, то всі числа $m_1, ..., m_{12}$ також парні. Тоді $\frac{m_1}{2}, ..., \frac{m_{12}}{2}$ – цілі додатні числа, а їх сума $\frac{m_1}{2} + ... + \frac{m_{12}}{2}$ є парним числом. При цьому кожне з чисел $\frac{m_1}{2}, ..., \frac{m_{12}}{2}$ має таку ж парність як число $\frac{m_{13}}{2}$. У разі, коли m_{13} – непарне число, числа $m_1 - 1, ..., m_{12} - 1$ – парні. При цьому $\frac{m_1 - 1}{2} + ... + \frac{m_6 - 1}{2} = \frac{m_7 - 1}{2} + ... + \frac{m_{12} - 1}{2}$, $\frac{m_7 - 1}{2} + ... + \frac{m_{12} - 1}{2}$ – парне число і кожне з чисел $\frac{m_1 - 1}{2}, ..., \frac{m_{12} - 1}{2}$ має таку ж парність, як число $\frac{m_{13} - 1}{2}$. Нехай n – таке найменше натуральне число, що всі числа $m_1, ..., m_{13}$ діляться без остачі на 2^n. Тоді, повторюючи аналогічні міркування, на n-у кроці дістанемо деякі цілі числа. Якщо всі вони дорівнюють 1, то маса кожної гирі дорівнює 2^n. В іншому разі всі числа $\frac{m_1}{2^n}, ..., \frac{m_{13}}{2^n}$ – непарні. Але тоді числа $\frac{m_1}{2^n} - 1, ..., \frac{m_{13}}{2^n} - 1$ діляться на 2. Оскільки числа $m_1, ..., m_{13}$ скінченні, то на деякому кроці після ділення на 2, отримаються рівні числа, а отже, числа $m_1, ..., m_{13}$ також повинні бути рівними. **15.** Сума є складеним числом, бо перший доданок закінчується цифрою 6, а другий – цифрою 9: $2007^{2006} = (2007^4)^{501} \cdot 2007^2$. Тому число ділиться без остачі на 5. **16.** *Рівняння розв'язків не має.* Висновок випливає з рівносильного рівняння

$$(2x^2 - x)^2 + (2x + 1)^2 = 0.$$

17. $n = 5r + 1, \text{äå}\ r = 0,1, ...$. Нехай $k > 1$ – ціле число, на яке можна скоротити дріб. Тоді знайдуться такі цілі додатні числа p і q, що $2n + 3 = kp, 3n + 2 = kq.$ З цих рівностей маємо $k(3p - 2q) = 5$. Тому $k = 5$, $3p - 2q = 1$. Спочатку, розв'язуючи отримане рівняння, знайдемо $p = 2r + 1, q = 3r + 1,$ а потім – $n = 5r + 1,$ де $r = 0,1, ...$. **18.** $8 + 4\pi$. Задана множина точок площини симетрична відносно осей координат. За умови, що $x \geq 0, y \geq 0$, це дуга кола $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, що міститься в першій чверті координатної площини. Площа всієї фігури, що обмежена заданою лінією, складається з площі квадрата зі стороною $2\sqrt{2}$ і площ чотирьох півкругів радіуса $\sqrt{2}$ (мал. 98).



Мал. 98

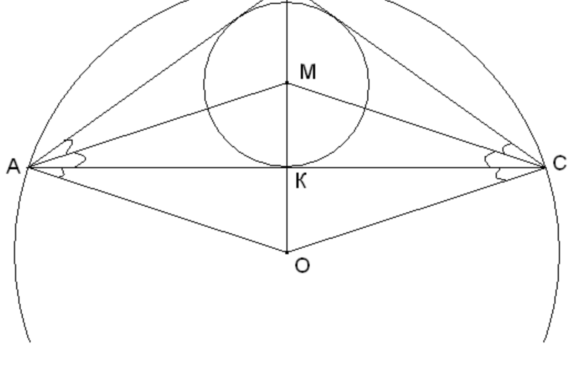


Мал. 99

19. Спочатку доведемо достатність. Нехай в трапеції $ABCD$ (мал. 99) сторони AD і BC – паралельні, сторони AB і CD рівні, M – середина сторони AB, пряма l – вісь симетрії. Тоді $S_l(AB) = CD$, $S_l(M) = N \in CD$ і $CN = ND$. Нехай O – точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до відрізків AB і CD. Тоді трикутник MON – рівнобедрений. Тому $O \in l$ і є центром описаного кола. Необхідність очевидна. **20.** *Ні, не можна.* Серед будь-яких чотирьох цілих чисел є два числа однакової парності. Їхня сума є парним числом, а тому не може бути степенем числа 3. **21.** *Виграє Андрійко.* Для цього йому потрібно насамперед поновити цифри 4 і 6, а далі використати центральну симетрію відносно осі стрілок.

IX КЛАС

1. $36°, 36°, 108°$**.** Нехай точки M і O – центри описаного і вписаного кіл відповідно (мал. 100). Чотирикутник $AMCO$ – ромб. Тому кути $MAC, CAO,$ ACO, ACM – рівні, їх величину позначимо через α. Оскільки M – точка перетину бісектрис, то кожний з кутів BAM, MAK, KCM, BCM дорівнює α. Звідси випливає, що $\angle BAO = \angle BCO = 3\alpha$. Трикутники AOB і BOC також рівнобедрені, тому $\angle ABO = \angle OBC = 3\alpha$. Оскільки сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює $180°$, то з трикутника ABC маємо рівність $10\alpha = 180°$, звідси $\alpha = 18°$. Далі знаходимо кути трикутника ABC.



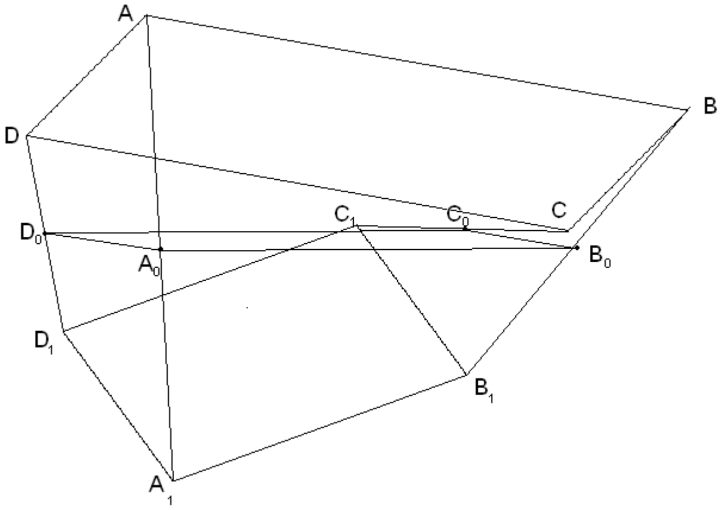
Мал. 100

2. Нехай точки A_0, B_0, C_0, D_0 – середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 відповідно (мал. 101). Розглянемо вектори $\overline{A_0B_0}$ та $\overline{D_0C_0}$:

$$\overline{A_0B_0} = \overline{A_0A} + \overline{AB} + \overline{BB_0}\,,\ \overline{A_0B_0} = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_0} \ \Rightarrow\ \overline{A_0B_0} = \frac{\overline{AB} + \overline{A_1B_1}}{2};$$

$$\overline{D_0C_0} = \overline{D_0D_1} + \overline{D_1C_1} + \overline{D_1C_0}\,,\ \overline{D_0C_0} = \overline{D_0D} + \overline{DC} + \overline{CC_0} \ \Rightarrow\ \overline{D_0C_0} = \frac{\overline{DC} + \overline{D_1C_1}}{2}$$

Оскільки $\overline{AB} = \overline{DC}, \overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1}$, то $\overline{A_0B_0} = \overline{D_0C_0}$. Тому $A_0B_0C_0D_0$ – паралелограм.



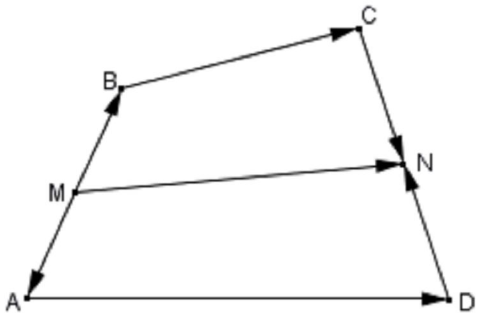
Мал. 101

3. Спочатку перетворимо ліву частину рівняння:

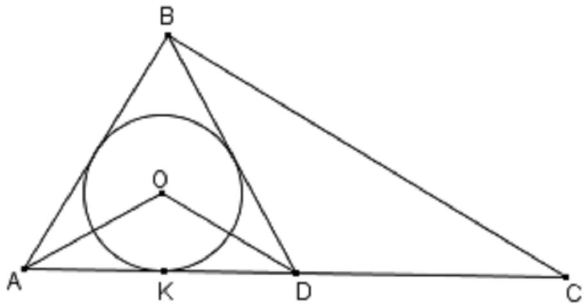
$$\frac{x^4+1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{(x^4+2x^2+1)-2x^2}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{x^2+1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

Далі, зробивши заміну $\frac{x^2+1}{x} = y$, отримаємо рівняння $y - \frac{2}{y} = \frac{41}{15}$, коренями якого є числа $-\frac{3}{5}$ і $\frac{10}{3}$. Повернувшись до підстановки, знаходимо $x = \frac{1}{3}$ та $x = 3$. **4.** Нерівність рівносильна очевидній нерівності $(a^2 - 2b^2 + 1)^2 + (2a - b)^2 \geq 0$. **5.** Виділимо у таблиці в кутку квадрат 2×2, що містить пофарбовану клітинку. В ньому за допомогою перефарбувань рядків чи стовпців неможна усі клітинки зробити білими, а отже, це не можна зробити і в усій таблиці. **6.** Дана рівність рівносильна рівності $y = x + k$, де $k = [y] - [x]$ – довільне ціле число. Тому шуканою множиною точок є сукупність прямих, що є графіками цих функцій. **7.** Кількість чисел, що діляться 10 і 14 без остачі, дорівнює $\left[\frac{1001}{10}\right] = 100$ і $\left[\frac{1001}{14}\right] = 71$ відповідно. Але в обидві групи увійшли числа, що діляться на 70, їхня кількість складає $\left[\frac{1001}{70}\right] = 14$ чисел. Тому є 157 натуральних чисел, менших за 1001, що діляться на 10 або на 14. **8.** Нехай точки

M і N – середини сторін AB і CD відповідно чотирикутника $ABCD$ (мал. 102). Задачу розв'язуватимо векторним способом. Для цього, додаючи векторні рівності $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ і $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, дістанемо рівність $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

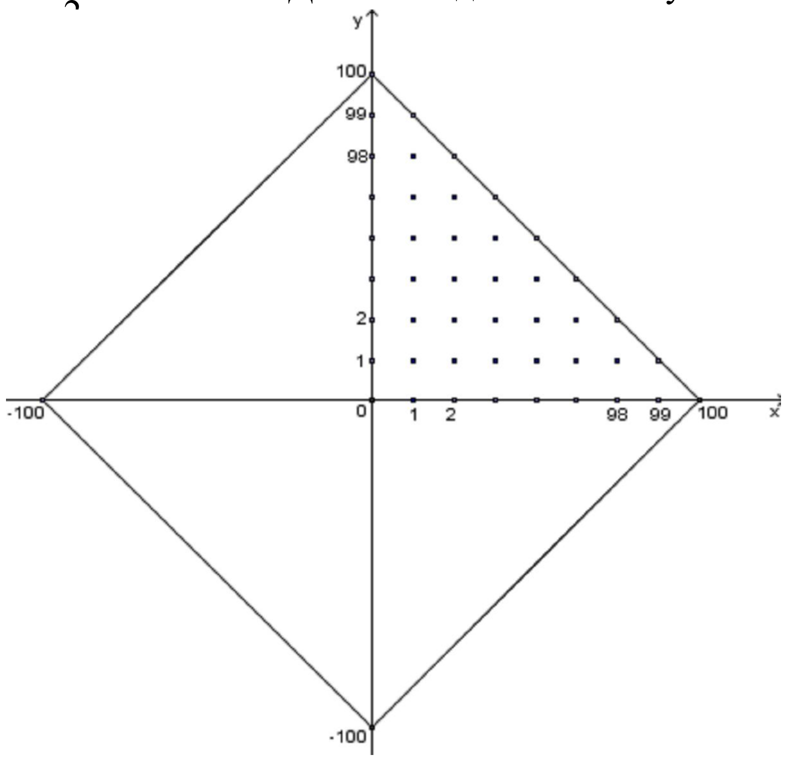


Мал. 102



Мал. 104

За умовою задачі $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right|}{2}$, а за властивістю модуля суми маємо $2\left|\overrightarrow{MN}\right| \le \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right|$. У цій нестрогій нерівності повинна виконуватися рівність, а це можливо тільки за умови, що вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ мають однаковий напрямок, а отже, паралельні. **9.** 19801. Для розв'язання задачі потрібно підрахувати кількість точок з цілими координатами, що містяться у квадраті (мал. 103) з вершинами в точках $(\pm 100; 0), (0; \pm 100)$. На координатних осях таких точок є $1 + 4 \cdot 99$. У першому координатному куті їх кількість дорівнює сумі $1 + 2 + ... + 98 = \dfrac{(1+98) \cdot 98}{2} = 4851$. Далі знаходимо загальну кількість точок.



Мал. 103

10. $30°$, $60°$. Нехай O – центр вписаного кола. Нескладно переконатися, що трикутник AOD – рівнобедрений (104). Промені AO і DO – бісектриси кутів BAD і ADB відповідно. Тому кути BAO, OAD, ODA і ODB рівні, а отже, $\angle BAD = \angle BDA$ і $AB = BD$. Водночас у трикутнику ADB рівні сторони AD і BD, тобто ABD – рівносторонній трикутник і всі його кути, зокрема й кут BAD, дорівнюють $60°$. Далі знаходимо величину кута ACB. **11.** У натуральному числі, що записане за допомогою однієї цифри 8 і тринадцяти цифр 9, сума цифр ділиться на 125, незалежно від порядку їх розташування. Утворимо число $p = \underbrace{9...9}_{13}7\underbrace{99...9}_{14}$. Сума його цифр дорівнює 250, а отже, вона ділиться на 125. У наступному натуральному числі $p+1$, яке дорівнює $\underbrace{9...9}_{13}8\underbrace{00...0}_{14}$, сума цифр також ділиться на 125. Однак число $q+1 = 8\underbrace{9...9}_{13}\underbrace{00...0}_{14}$, у якому цифра 8 стоїть на першому місці, менше за число $p+1$, а сума цифр попереднього числа $q = 8\underbrace{9...9}_{12}8\underbrace{99...9}_{14}$ дорівнює 250, що також ділиться на 125. Тому шукану пару утворюють числа q і $q+1$. **12.** Розв'яжемо рівність $5a + 4b + 11c = 0$ відносно змінної a.

$$a = \frac{-4b - 11c}{5} = \frac{(-5b - 10c) + b - c}{5} = -b - 2c + \frac{b-c}{5}.$$

Число a буде цілим, якщо $b - c = 5n$, де n – ціле число. Тому $b = c + 5n$, $a = -3c - 4n$. Перетворимо вираз $10a + 3b + 2c$.

$$10a + 3b + 2c = 10(-3c - 4n) + 3(c + 5n) + 2c = (-25c - 25n) \vdots 25.$$

13. *Так, зможе.* Для цього другому гравцеві потрібно запитати, чому дорівнює сума $10^{18}x_9 + ... + 10^2 x_2 + 1 \cdot x_1$. Якщо задумані першим гравцем числа невід'ємні, то ця сума має вигляд $\overline{x_9 0 x_8 0 \ldots 0 x_2 0 x_1}$, тобто на всіх парних позиціях записані нулі. Якщо на позиції $2k$ буде цифра 9, то число x_{k+1} дорівнює цифрі, що стоїть перед 9, збільшеній на 1, а число x_k – від'ємне, його модуль дорівнює різниці числа 10 і цифри, що стоїть після цифри 9. Зауважимо, що цей алгоритм не залежить від кількості задуманих чисел. Якщо, наприклад, перший задумав числа $3, 8, 4, -9, 2$, то для суми добутків маємо таку рівність:

$$3 \cdot 10^8 + 8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^2 + 2 = 308039102.$$

Навпаки, нехай сума добутків дорівнює числу 6970401, то задумані числа такі: $7, -3, 4, 1$. **14.** *Ні, не можна.* Припустимо, що викладений ланцюжок починається одиницею, а закінчується п'ятіркою. Тоді для здійснення переходів $n:n$, $n = 0, 2, 3, 4$, потрібна парна кількість n-половинок, а після вилучення шісток їх залишилось по 7. **15.** $a = 6, b = 4.$ З умов подільності на 9 і на 11 маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b + 17 = 9n, \\ a - b + 9 = 11k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 9n - 17, \\ a - b = 11k - 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 9n + 11k - 26, \\ 2b = 9n - 11k - 8, \end{cases}$$

де a,b – цифри десяткової системи числення, n,k – цілі числа. Зрозуміло, що числа n,k підпорядковані умовам:

$$\begin{cases} 0 \le 9n + 11k - 26 \le 18, \\ 0 \le 9n - 11k - 8 \le 18, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 - 9n \le 11k \le 44 - 9n, \\ 9n - 26 \le 11k \le 9n - 8, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 26 - 9n \le 9n - 8, \\ 9n - 26 \le 44 - 9n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34 \le 18n, \\ 18n \le 70, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2, \\ n = 3. \end{array} \right.$$

Якщо $n = 2$, то $a + b = 1$. Звідси $a = 0, b = 1$ або $a = 1, b = 0$. Перевіркою переконуємося, що числа 20062017 і 21062007 не діляться без остачі на 99.
Якщо $n = 3$, то з системи рівнянь

$$\begin{cases} a + b = 10, \\ a - b + 9 = 11k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - a, \\ a = \dfrac{1 + 11k}{2}, \end{cases}$$

отримуємо $k = 1, a = 6, b = 4$. **16.** Запишемо рівняння так: $y^2 = \dfrac{(x-1)(x+1)}{17}$. Оскільки 17 – просте число, то один з множників чисельника повинен ділитися без остачі на 17. Водночас права частина повинна бути квадратом цілого числа. Нескладно переконатися, що $x = 33$, а $y = 8$. Отже, (33;8) – шукана пара. Для доведення другої частини задачі виконаємо наступні перетворення:

$$x^2 - 17y^2 = 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{17}y)(x + \sqrt{17}y) = 1 \Rightarrow \left((x - \sqrt{17}y)(x + \sqrt{17}y)\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x^2 + 17y^2) - 2\sqrt{17}xy\right)\left((x^2 + 17y^2) + 2\sqrt{17}xy\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 17y^2)^2 - 17(2xy)^2 = 1 .$$

З останньої рівності випливає, що рівняння має нескінченну множину розв’язків, які можна записати рекурентними формулами:

$$x_n = (x_{n-1}^2 + 17y_{n-1}^2),\ y_n = 2x_{n-1}y_{n-1},\ n = 1, 2, ..., \text{ де } x_0 = 33,\ y_0 = 8.$$

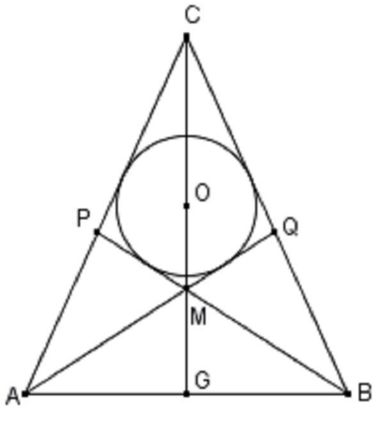
17. Спочатку до лівої частини нерівності застосуємо співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним:

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \ge 2\sqrt{\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-y^2}},$$

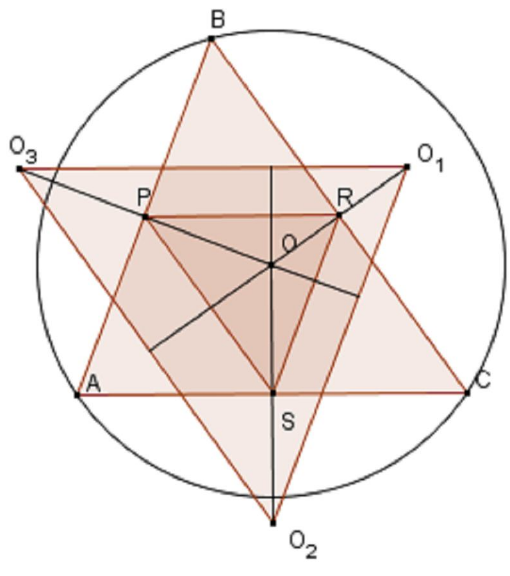
а далі доведемо нерівність

$$2\sqrt{\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-y^2}} \ge \frac{2}{1-xy} \Leftrightarrow (1-xy)^2 \ge (1-x^2)(1-y^2) \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0.$$

18. 7. Єдиним парним простим числом є 2. Якщо $p = 2$, то $p^2 - 8p + 9 < 0$. Нехай $p = 2n + 1$. Тоді $p^2 - 8p + 9 = 2(2n^2 - 6n + 1)$ буде простим числом тільки за умови, що $2n^2 - 6n + 1 = 1$. Звідси $n = 0$ або $n = 3$, а $p = 7$. **19.** *Так, може.* Розіб’ємо дівчаток на три пари. Нехай перша дівчинка з першої пари знайома з усіма хлопцями, а друга дівчинка з цієї пари не знає жодного хлопця. Перша дівчинка з другої пари знає чотирьох хлопчиків, а друга дівчинка знайома з п'ятим хлопцем. І нарешті, перша дівчинка з третьої пари знайома з трьома хлопцями, а друга дівчинка знає двох інших. Нескладно переконатися, що кожний хлопчик знайомий з трьома дівчатками, а всі дівчатка знайомі з різною кількістю хлопчиків. **20.** Вважатимемо, що одна з вершин трикутника збігається з фіксованою вершиною A 155-кутника. Усього трикутників з фіксованою вершиною A буде $\frac{154 \cdot 153}{2} = 11781$. Правильних трикутників серед них немає. Рівнобедрених трикутників з вершиною A і основою, паралельною протилежній стороні $A_{78}A_{79}$, буде 77; рівнобедрених трикутників, одна з вершин основ яких співпадатиме з точкою A, буде $2 \cdot 77$. Усього різносторонніх трикутників буде $311781 - 3 \cdot 77$, але кожний з них буде повторюватися 6 разів. Тому можна утворити попарно різних трикутників $77 + \frac{11781 - 231}{6} = 2002$. *Відповідь:* 2002. **21.** Оскільки всі бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, а центр вписаного кола лежить на бісектрисах кутів PCQ і PMQ (мал. 105), то CM є бісектрисою цих кутів. Тому за другою ознакою рівності трикутників $\Delta CMP = \Delta CMQ$, а $PC = CQ, PM = MQ$. Трикутники APM і BQM також рівні за другою ознакою рівності трикутників, бо $\angle PMA = \angle QMB$ як вертикальні, а $\angle APM = \angle MQB$ як суміжні до рівних кутів MPC і MQC. Тому $AP = QB$. Отже, $AC = AP + PC = QB + CQ = CB$, що треба було довести.



Мал. 105



Мал. 106

X КЛАС

1. За формулою потрійного аргументу маємо $\sin 54° = 3\sin 18° - 4\sin^3 18°$, а за формулою зведення $\sin 54° = \cos 36°$. Використавши формулу подвійного аргументу, маємо: $\sin 54° = 1 - 2\sin^2 18°$. Звідси дістаємо рівняння:

$$1 - 2\sin^2 18° = 3\sin 18° - 4\sin^3 18° \Leftrightarrow (\sin 18° - 1)(4\sin^2 18 + 2\sin 18° - 1) = 0,$$

з якого знаходимо $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **2.** 900. Квадрат даного числа n запишемо так: $n^2 = (10^{100}-1)^2 = 10^{200} - 2\cdot 10^{100} + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{99}8\underbrace{00\ldots0}_{99}1$. Звідси знаходимо суму цифр числа n^2: $99\cdot 9 + 8 + 1 = 900$. **3.** Середня лінія PR трикутника ABC (мал. 106) паралельна стороні AC, а отже, перпендикулярна OO_2. Але PR є середньою лінією і в трикутнику OO_1O_3, тому OO_2 є висотою трикутника $O_1O_2O_3$. Аналогічно доводиться, що точка O буде лежати на перетині висот трикутника $O_1O_2O_3$. Знайшовши її положення, легко знайти положення точок A, B, C – вони лежатимуть на попарних перетинах серединних перпендикулярів до відрізків OO_1, OO_2 та OO_3. **4.** $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Виразимо множину розв'язків нерівності $(x-3a)(x-a-3) < 0$ через a. Якщо $3a < a+3$, то $x \in (3a, a+3)$, в іншому разі $x \in (a+3, 3a)$. Але в обох випадках проміжок $[1;3]$ повинен належати отриманим інтервалам. Маємо сукупність систем нерівностей:

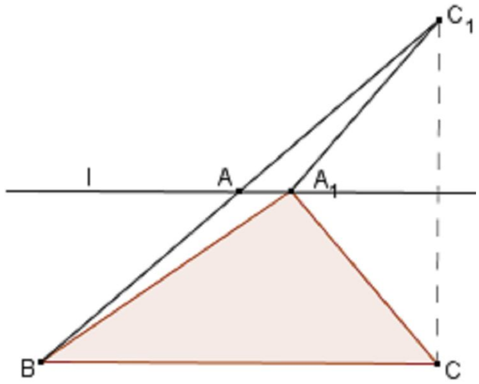
$$\begin{cases} 3a < a+3, \\ 3a < 1, \\ a+3 > 3, \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3a > a+3, \\ a+3 < 1, \\ 3a > 3. \end{cases}$$

Перша система виконується для $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$, друга система несумісна. **5.** $-1, \sqrt{3}, 2$. Оскільки $[x] = x - \{x\}$, то дістаємо рівносильне рівняння $2 + x - x^2 = \{x\}$. За властивістю дробової частини права частина рівняння міститься в проміжку $[0;1)$. Тому $0 \le 2 + x - x^2 < 1$, а $x \in \left[-1; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right]$. Якщо $x \in \left[-1; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$, то $[x] = -1$. Розв'язуючи рівняння $x^2 - 1 = 0$, знаходимо $x_1 = -1$. Для $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right]$ маємо $x_2 = \sqrt{3}$ і $x_3 = 2$. **6.** Нехай x і y – довжини сторін, k – їхнє відношення, S – площа прямокутника. Розв'язання задачі зводиться до розв'язання системи двох рівнянь $\frac{x}{y} = k$ і $xy = S$. З неї отримуємо: $x = \sqrt{kS}$, $y = \sqrt{\frac{S}{k}}$. **7.** *За 3 зважування.* Кульки треба розділити на 3 групи по 27, 27 та 26 штук. Порівнявши вагу двох купок по 27 виявляємо, в якій з трьох купок є легша кулька. Далі, діючи аналогічно, скорочуємо розмір купки з легшою кулькою до 9 та 3 кульок. Останнім зважуванням виявляємо 1 легшу кульку з трьох. **8.** $1,1,1; 1,n,n$ і $n,1,n$, де $n = 2,3,\ldots$. Запишемо рівняння так: $z(x+y) = xy(z+1)$. Якщо $z = 1$, то $x + 1 = 2xy \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1) = 1 \Rightarrow x = y = 1$. В іншому разі z і $z+1$ – взаємно прості числа, а тому рівність можлива тільки за умови, що $z = kxy$, де k – деяке натуральне число. Тоді

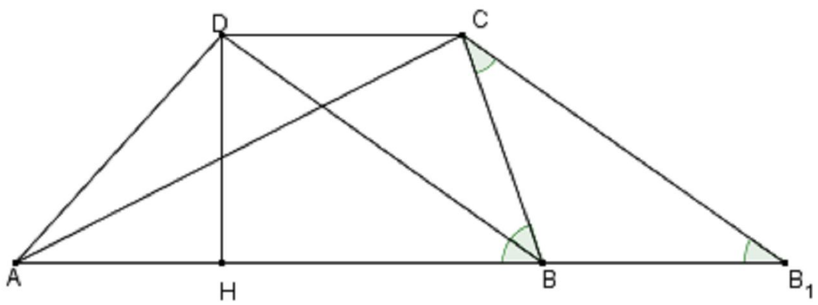
$$kxy(x+y) = xy(kxy+1) \Leftrightarrow k(x+y-xy) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k=1, \\ x+y-xy=1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=1, \\ (x-1)(y-1)=0, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=z=n,\ n=2,3,\ldots, \\ y=1,\ x=z=n,\ n=2,3,\ldots. \end{array} \right.$$

9. Нехай площа трикутника A_1BC (мал. 107) дорівнює S, довжина сторони BC – a. Через вершину A_1 проведемо пряму l паралельну прямій BC. Побудуємо точку C_1, симетричну точці C відносно прямої l. Для периметра p трикутника A_1BC маємо: $p = A_1B + A_1C + BC = A_1B + A_1C_1 + BC$. Зрозуміло, що периметр p буде найменшим, якщо точка A_1 збігатиметься з точкою A перетину прямих l і BC_1. Оскільки $AC = AC_1 = AB$, то трикутник BAC – рівнобедрений, і його площа дорівнює S.



Мал. 107



Мал. 108

10. Побудуємо точку B_1 (мал. 108) так, щоб $BB_1 = d$. Тоді чотирикутник BB_1CD – паралелограм. З рівностей $\angle BCB_1 = \angle CBD = \angle ABD = \angle BB_1C$ випливає, що $\angle BCB_1 = \angle BB_1C$. Тому $CB = d$. Аналогічно можна довести, що $AD = d$. Отже, трапеція рівнобедрена. Якщо DH – висота трапеції, то

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3d^2 + 2ad - a^2}.$$

Насамкінець знаходимо площу трапеції: $S=\frac{1}{4}(a+d)\sqrt{3d^2+2ad-a^2}$. Задача має розв'язок за умови, $a<3d$. До цього висновку можна дійти і геометрично, користуючись малюнком, і алгебраїчно, розв'язуючи нерівність $3d^2+2ad-a^2>0$. **11.** Нехай x і y – різні числа. Для шести чисел, кожне з яких може набувати одне з двох цих значень, може бути три випадки: 5 чисел дорівнюють x, одне – y; 4 числа дорівнюють x, 2 – y; 3 дорівнюють x і 3 – y. У першому випадку точки будуть вершинами ромба, одна діагональ якого дорівнює стороні; у другому – точки є вершинами квадрата; у третьому – три точки є вершинами правильного трикутника, а четверта точка – його центром. Нескладно підрахувати відношення довжин. Воно буде $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ відповідно. **12.** $f(x)=2007.$ *1-й спосіб.* Нехай $f(x)$ – шукана функція. Візьмемо $y=0$. Тоді для довільного x виконуватиметься рівність:

$$f(x)=[f(x)]+\{f(0)\}\Leftrightarrow\{f(x)\}=\{f(0)\}.$$

Тому для довільних x і y маємо рівність: $f(x+y)=[f(x)]+\{f(0)\}$. Якщо $x=0$, то для довільного y дістанемо: $f(y)=[f(0)]+\{f(0)\}\Rightarrow f(y)=f(0)$. За умови, що $y=2006$, маємо $f(2006)=f(0)$. Далі знаходимо $f(x)=2007$ для всіх x. *2-й спосіб.* Для довільних x і y утворимо ланцюжок рівностей:

$$x+y=y+x\Rightarrow f(x+y)=f(y+x)\Rightarrow[f(x)]+\{f(y)\}\Rightarrow[f(y)]+\{f(x)\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[f(x)]-\{f(x)\}\Rightarrow[f(y)]-\{f(y)\}\Rightarrow\begin{cases}[f(x)]-\{f(x)\}=c,\\ [f(y)]-\{f(y)\}=c,\end{cases}$$

де c – деяка постійна. Якщо $x=2006$, то

$$[f(2006)]-\{f(2006)\}=c\Rightarrow[2007]-\{2007\}=c\Rightarrow c=2007.$$

З рівності $[f(x)]-\{f(x)\}=2007$ випливає, що $[f(x)]=2007, \{f(x)\}=0$. Тому $f(x)=2007$. **13.** Нехай a,b,c – кількість марок Андрія, Бориса, Сергія відповідно; x – кількість марок Андрія, що є в Бориса, y – кількість марок Бориса, що є в Сергія, z – кількість марок Сергія, що є в Андрія. Тоді $\frac{b}{2}<x, \frac{c}{2}<y, \frac{a}{2}<z.$ Припустимо, що в трьох хлопців немає однакової марки. Тоді у Сергія та Андрія можуть бути однакові марки тільки ті, яких немає в Бориса. Тому $z<\frac{b}{2}$. Подібними міркуваннями встановлюємо, що $x<\frac{c}{2}, y<\frac{a}{2}.$ Перемножуючи нерівності, приходимо до суперечності:

$$\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a}{2}<xyz<\frac{c}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\Rightarrow bca<cab,$$

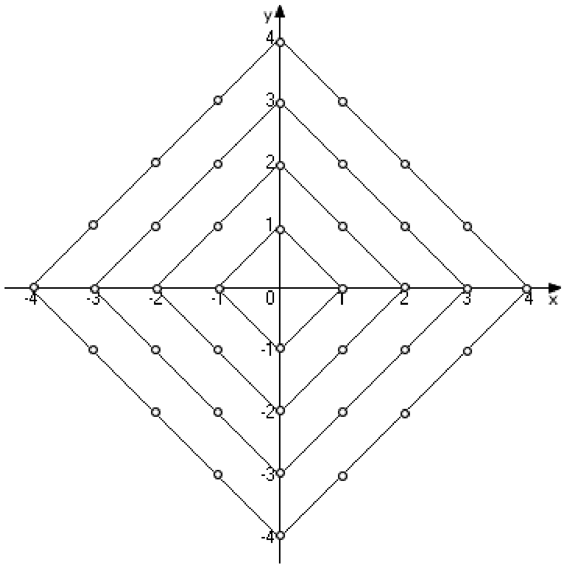
яка сталася за рахунок хибного припущення. Отже, у колекціях Андрія, Бориса і Сергія є однакова марка. **14.** Нехай x, y і z – кількість горобців, синиць і голубів відповідно. Тоді

$$\begin{cases}x+y+z+30,\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+2z=30,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=30-(x+y),\\ 10x+9y=180,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=30-(x+y),\\ y=20-10\cdot\frac{x}{9}.\end{cases}$$

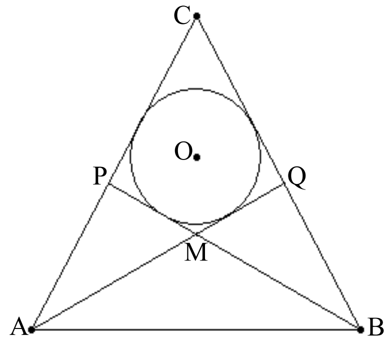
Звідси маємо $x=9n, y=20-10n, z=10+n$, де n – ціле число. Оскільки x, y і z – додатні числа, то $n=1$, а $x=9, y=10, z=11$. **15.** (0; 0), (0; 5). *1-й спосіб.* Виконавши заміни $2x+y=u, 2x-y=v$, отримаємо рівняння $11u^2+5v^2=80u$. Зрозуміло, що $11u^2 \le 80u$. Тому $0 \le u \le 7$, причому u кратне 5. Маємо $u=0, v=0$ або $u=5, v^2=25$. Далі знаходимо $x=y=0; x=0, y=5$.
2-й спосіб. Ліва частина рівняння є квадратним тричленом змінної y з параметром x. Його дискримінант $D=(3x-10)^2-8(8x^2-20x)$ невід'ємний, якщо

$$\frac{10-8\sqrt{5}}{11} \le x \le \frac{10+8\sqrt{5}}{11}.$$

Тому x може дорівнювати тільки 0, 1 або 2. Якщо $x=0$, то $y=0$ або $y=5$. В інших випадках y не є цілим числом. **16.** Нерівність рівносильна очевидній нерівності $(x+y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2>0$. **17.** Припустимо, що x_1 – цілий корінь рівняння. Тоді й другий корінь x_2 також ціле число, бо $x_1+x_2=-a$. Оскільки $f(120)=(120-x_1)(120-x_2)$ – просте число, то $|120-x_2|=1$, а $|120-x_1|$ – просте число. З першої рівності отримуємо $x_2=120\pm1\ge119$. За теоремою Вієта $x_1x_2=b$. Тому з нерівності $|x_1x_2|=|b|\le800$ маємо нерівність $|x_1|\le\frac{880}{119}<7$. Нескладно встановити, що $120-x_1\in(113;127)$. У цьому проміжку є тільки одне просте число 127. Тому $x_1=7$, а $b=x_1x_2\ge7\cdot119>800$, що суперечить умові задачі. Отже, припущення неправильне. Рівняння $f(x)=0$ не має цілих коренів.



Мал. 109



Мал. 110

18. Шукана множина точок симетрична відносно осей координат, причому їхні координати не можуть бути цілими числами. Тому розглянемо випадок $x>0, y>0$. Маємо рівняння $\{x\}+\{y\}=1$. Оскільки $\{x\}=x-[x], \{y\}=y-[y]$, то його запишемо так: $x+y=1+n$, де $n=[x]+[y]$ – ціле невід'ємне число. Побудувавши відрізки цих прямих у першій чверті і виконавши симетрію відносно осей координат, отримаємо сукупність квадратів з вершинами в точках $(\pm n;0),(0;\pm n), n\in\mathbf{N}$, з яких вилучені точки з цілочисельними координатами (мал. 109). **9.** Нехай $k_1,k_2,...,k_n$ – натуральні числа такі, що $k_1+k_2+...+k_n=2007$. З нерівності $\frac{k_1+k_2+...+k_n}{n}\ge\sqrt[n]{k_1\cdot k_2\cdot...\cdot k_n}$ маємо нерівність $k_1\cdot k_2\cdot...\cdot k_n\le\left(\frac{2007}{n}\right)^n$. За цієї умови найбільше значення добутку дорівнюватиме $\left(\frac{2007}{n}\right)^n$ тільки тоді, коли $k_1=k_2=...=k_n$. Оскільки $2007=1\cdot2007=3\cdot669=9\cdot223$, то шукане значення міститься серед чисел $\left(\frac{2007}{2007}\right)^{2007}=1, \left(\frac{2007}{669}\right)^{669}=3^{669}, \left(\frac{2007}{223}\right)^{223}=9^{233}, \left(\frac{2007}{9}\right)^{9}=223^9$, $\left(\frac{2007}{3}\right)^{3}=669^3$ і дорівнює 3^{669}. Отже, $2007=\underbrace{3+3+...+3}_{669}$ – шукане подання. **20.** Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що такий трикутник не існує. Нехай точки мають кольори α,β,γ. Візьмемо дві точки A і B кольору α, a – відстань між ними. Через ці точки проведемо пряму l. Далі проведемо прямі n і k, рівновіддалені від l на $\frac{2}{a}$. Згідно з припущенням кожна точка цих прямих має або колір β, або колір γ. Візьмемо на прямій n три різні точки M,N,K так, щоб $MN=NK=a$. Якщо всі вони кольору β, то всі точки прямої k повинні мати колір γ, а всі точки прямої l повинні бути кольору α. Очевидно, що й усі точки прямої n повинні бути кольору β. Але тоді для довільної точки X, що не міститься на цих прямих, на одній з них знайдуться точки Y,Z такого ж кольору, що й точка X, які будуть вершинами трикутника, що має площу рівну 1. Це суперечить припущенню. Тому не всі точки M,N,K мають однаковий колір. Якщо точки M,N або точки N,K кольору β, то всі точки прямої k повинні мати колір γ. Знову приходимо до суперечності. Залишається випадок, коли точки M,K кольору β, а точка N має колір γ. Тоді нескладно переконатися, що точки прямої l матимуть колір α або γ, а точки прямої k повинні бути або кольору β або γ. Далі візьмемо три різні точки P,Q,R на прямій k так, щоб $PQ=QR=a$. Зрозуміло, що точка Q має колір γ, точки P,R – колір β. Легко переконатися, що всі точки прямої l, і тільки її точки, повинні мати колір α. Повторюючи аналогічні міркування, приходимо до висновку, що існує деяка пряма m, паралельна прямій l, усі точки якої мають колір β, а всі інші точки площини мають колір γ. У цьому випадку легко побудувати трикутник, що має площу рівну 1 з вершинами кольору γ, тобто знову приходимо до суперечності. Отже, припущення неправильне. Шуканий трикутник існує. **21.** Прямокутні трикутники AQC і BPC подібні (мал. 110), бо мають спільний кут C. Нехай k – коефіцієнт подібності, p_1 і p_2 – периметри, S_1 і S_2 – площі трикутників AQC і BPC відповідно. Тоді

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AQ}{BP}=\frac{CQ}{CP}=k\,,\ \frac{p_1}{p_2}=k,\frac{S_1}{S_2}=k^2\ .$$

Якщо r – радіус вписаного кола, то $S_1=\frac{p_1 r}{2},\ S_2=\frac{p_2 r}{2}$.Звідси

$$\frac{S_1}{p_1}=\frac{S_2}{p_2}\ \Leftrightarrow\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{p_1}{p_2}\Rightarrow\ k^2=k\Rightarrow\ k=1.$$

З рівності трикутників AQC і BPC маємо $AQ=PB$, $QC=PC$. Прямокутні трикутники AQB і BPQ рівні, бо мають спільну гіпотенузу і рівні катети AQ і PB. Тому $AP=QB$. Далі маємо рівність $AC=AP+PC=BQ+QC=BC$, яку треба було довести.

XI КЛАС

1. Перетворимо ліву частину рівності, використовуючи співвідношення між тригонометричними функціями:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=(\cos\alpha+\cos\beta)-(1-\cos\gamma)+1=$$
$$=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=1+2\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=1+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=1+2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$
$$=1+2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\right)=1+2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=1+4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Тотожність доведено. **2.** Нехай a – перший член цієї прогресії, k – її різниця. Тоді система набуде вигляду

$$\begin{cases} ax+(a+k)y+a+2k=0,\\ (a+3k)x+(a+4k)y+a+5k=0. \end{cases}$$

Віднявши від другого рівняння перше отримаємо $3kx+3ky+3k=0$. Якщо $k\neq 0$, то $x+y+1=0$. Віднявши це рівняння, помножене на a, від першого рівняння системи, спочатку отримаємо $y=-2$, а потім $x=1$. Якщо ж $k=0$, $a\neq 0$, то систему задовольняє будь-яка пара чисел x і y таких, що $x+y+1=0$. За умови, що $a=0$ і $k=0$ розв'язком системи є будь-яка пара чисел. **3.** Нехай v – швидкість трамваїв, u – швидкість пішохода, x – інтервал руху трамваїв. Тоді відстань між трамваями на маршруті буде vx. Швидкості зустрічного та попутного трамвая відносно пішохода дорівнюють $v+u$ та $v-u$ відповідно. Тоді

$$\begin{cases} 5(v+u)=vx, \\ 7(v-u)=vx, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x-5)=5u, \\ v(7-x)=7u, \end{cases} \Rightarrow \frac{x-5}{7-x}=\frac{5}{7} \Rightarrow x=\frac{70}{12}.$$

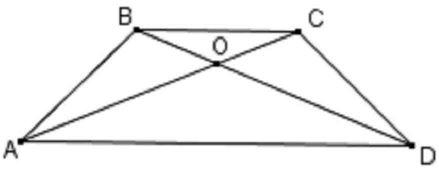
Отже, інтервал руху трамваїв дорівнює 5 *хв.* 50 *сек.* **4.** Спочатку перетворимо праву частину рівняння.

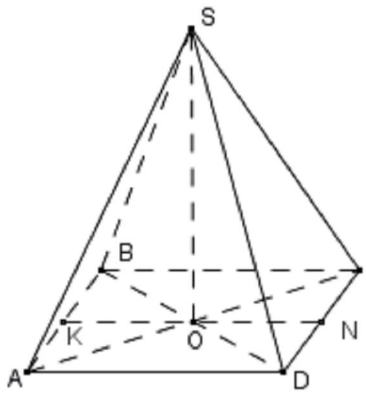
$$1+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=2+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2-\sin x.$$

Далі розв'язуватимемо рівняння $\cos kx = 2-\sin x$ з цілим параметром k. Оскільки ліва частина рівняння не може перевищувати 1, то воно рівносильне такій системі:

$$\begin{cases} \cos kx = 1, \\ \sin x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx = 2\pi n, n\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z, \end{cases} \Rightarrow (1+4m)k=4n.$$

Звідси випливає, що $k=4p, p\in \mathbf{N}$.





Мал. 111 Мал. 112

5. 2. Нехай O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ (мал. 111) $BC=2, \angle ABC=\angle BCD=135°$, $\angle AOD=150°$. З трикутника BOC випливає, що $\angle ACB=\angle CBD=15°$. Тоді $\angle BAC=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=30°$. З трикутника ABC за теоремою синусів маємо

$$\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin A}{BC} \Rightarrow AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{2\sin 135°}{\sin 30°}=2\sqrt{2}.$$

Далі знаходимо площу S трапеції

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\angle AOD=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2\sin 150°=2.$$

6. $16k^2-1$, $k\in\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$. Побудуємо висоту SO правильної піраміди $SABCD$ і апофеми SK та SN її протилежних бічних граней (мал. 112). Нехай $AD=a, \angle SNO=\alpha$, $\angle KSN=\beta$, S_1 – площа бічної поверхні, S_2 – площа перерізу. Тоді $AC = a\sqrt{2}$, $SO = \frac{a}{2}tg\alpha$, $S_1 = \frac{a^2}{\cos\alpha}, S_2 = \frac{\sqrt{2}a^2tg\alpha}{4}$. З умови $\frac{S_2}{S_1} = k$ маємо рівність $\frac{\sqrt{2}a^2tg\alpha}{4} = k\ \frac{a^2}{\cos\alpha}\ \Rightarrow \sin\alpha = 2\sqrt{2}k$. Далі знаходимо

$$\cos\beta = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1 = 16k^2 - 1.$$

Враховуючи обмеженість косинуса, встановлюємо, що задача має розв'язок для $k \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$. **7.** $y \in [-9{,}5; -0{,}5]$. *І-й спосіб.* Область значень функції $y = \frac{18x - 5x^2 - 20}{x^2 + 4}$ збігається зі значеннями параметра *a*, при яких рівняння $\frac{18x - 5x^2 - 20}{x^2 + 4} = a$ має хоча б один розв'язок. Рівняння зводиться до вигляду $(a+5)x^2 - 18x + 4a + 20 = 0$. За умови, що $a = 5$, рівняння буде лінійним і матиме один корінь. Якщо $a \neq 5$, то корені існуватимуть, коли

$$81 - 4(a+5)\cdot(a+5) \geq 0 \Rightarrow\ -9{,}5 \leq a \leq -0{,}5.$$

2-й спосіб. Використаємо співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним для двох невід'ємних чисел. Якщо $x > 0$, то

$$-5 < y = \frac{18x - 5x^2 - 20}{x^2 + 4} = -5 + \frac{18}{x + \frac{4}{x}} \leq -5 + \frac{18}{2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}} = -0{,}5.$$

Для $x < 0$ маємо

$$-5 > y = \frac{18x - 5x^2 - 20}{x^2 + 4} = -5 - \frac{18}{-x + \frac{4}{-x}} \geq -5 - \frac{18}{2\sqrt{(-x)\cdot\frac{4}{-x}}} = -9{,}5.$$

Оскільки $y(0) = -5$, то $-9{,}5 \leq y \leq -0{,}5$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. **8.** Уведемо позначення $b = a^2 - a - \frac{1}{16}, t = a + x$, з урахуванням яких рівняння запишеться так: $t^2 - b = \sqrt{t+b}$. Нескладно переконатися, що $y \in \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}\right)$ для $a \in \left(0 < a < \frac{1}{4}\right)$ і $t > -b > \frac{1}{16}$. Функції $f(t) = t^2 - b$ і $g(t) = \sqrt{t+b}$ для $t > -b$ є взаємно оберненими, а їхні графіки симетричними відносно бісектриси першого координатного кута. Якщо графіки цих функцій перетинаються, то точки перетину лежать на прямій $y = t$. Тому розв'язки рівняння $t^2 - b = \sqrt{t+b}$. збігатимуться з розв'язками рівняння $t^2 - b = t$, яке рівносильне рівнянню $t = \sqrt{t+b}$. З квадратного рівняння знаходимо

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 - 4a \pm \sqrt{16a^2 - 16a + 3}}{4}.$$

9. $\frac{3}{2}<|a|<\frac{5}{2}$. *Графічний спосіб.* Виділимо в рівняннях системи квадрати двочленів:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+a)^2=16,\\(x-3)^2+(y-a)^2=1.\end{cases}$$

Система матиме два розв'язки, якщо кола, які є графіками рівнянь системи, перетинатимуться. Оскільки відстань d між їхніми центрами дорівнює $2|a|$, радіуси $R_1=4$ і $R_2=1$, то кола перетинатимуться за умови, що $|R_1-R_2|<d<R_1+R_2$. Звідси маємо, що $\frac{3}{2}<|a|<\frac{5}{2}$. *Аналітичний спосіб.* Спочатку додамо, а потім віднімемо рівняння системи:

$$\begin{cases}4ay=15,\\2x^2+2y^2-12x=-1-2a^2.\end{cases}$$

За умови $a=0$ система несумісна. Тому приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases}y=\dfrac{15}{4a},\\[2mm]2x^2-12x+1+2a^2+\dfrac{225}{8a^2}=0.\end{cases}$$

Ця система матиме два різні розв'язки за умови, що дискримінант другого рівняння буде додатний

$$36-2\left(\frac{225}{8a^2}+2a^2+1\right)>0\Leftrightarrow 16a^4-136a^2+225<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{9}{4}<a^2<\frac{25}{4}\Leftrightarrow\ \frac{3}{2}<|a|<\frac{5}{2}.$$

10. $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$**.** Якщо $x<\frac{1}{2}$, то $[x^2]\geq 0$, а $[2x]\leq 0$, тому всі числа, які менші за $\frac{1}{2}$, є розв'язками нерівності. Для $x\geq 2$ виконується нерівність $x^2\geq 2x$. Тому $[x^2]\geq[2x]$, а отже, і числа, не менші за 2, є розв'язками. Для відшукання інших розв'язків поділимо проміжок $\left[\frac{1}{2};2\right)$ точками 1, $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$ на частини, в кожній з яких ціла частина x^2 і $2x$ не змінюється. Порівнюючи $[x^2]$ і $[2x]$ для x з кожного проміжку, встановлюємо, що числа з проміжків $\left[\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$ і $\left[\sqrt{3},2\right)$ є розв'язками нерівності. **11.** Припустимо, що це можна зробити. Тоді для кожної сторони многокутника знайдеться інша його сторона, яка буде їй паралельна. Оскільки многокутник опуклий, то така сторона буде єдина. Тому необхідною умовою того, що опуклий многокутник можна розрізати на паралелограми, є парна кількість його сторін. Число 13 – непарне. Отже, його не можна розрізати на паралелограми. **12.** Площа даної сфери дорівнює 400π. Площа поверхні описаного 19-гранника більша за площу сфери, а отже, більша за 400π. Тому площа деякої грані G цього многогранника більша за $\frac{400\pi}{19}$. Нехай A – точка дотику цієї грані зі сферою. В площині грані G побудуємо круг з центром у точці A радіуса $\sqrt{21}$. Його площа 21π менша за площу грані: $21\pi < \frac{400\pi}{19}$. За принципом Дирихле існує точка B, що належить грані G і не належить побудованому кругу. Тоді $AB > \sqrt{21}$. Якщо O – центр кулі, C – точка перетину прямої BO з поверхнею 19-гранника і $B \neq C$, то $BO > \sqrt{121} = 11$, а $BC > 21$. **13.** Нескладно переконатися, що трійка чисел 2, 2, 2 одна з шуканих. Інші шукатимемо у вигляді $a = b = 2^n, c = 2^k$, де n і k – натуральні числа. Знайдемо ті n і k, для яких виконується рівність

$$\left(2^n\right)^{15} + \left(2^n\right)^{15} = \left(2^k\right)^{16} \Leftrightarrow 2^{15n+1} = 2^{16n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15n + 1 = 16k \Leftrightarrow n = k + \frac{k-1}{15} \Rightarrow \begin{cases} k = 15p + 1, \\ n = 16p + 1, \ p \in \square. \end{cases}$$

Отримана нескінченна множина трійок натуральних чисел $2^{15p+1}, 2^{15p+1}, 2^{16p+1}$, де $p = 0, 1, \ldots$, задовольняє задану рівність. **14.** Спочатку дівчинці потрібно провести діагональ, що проходить через центр описаного кола. Потім проводити діагоналі, симетричні діагоналям, які проводить хлопчик, відносно цієї діагоналі. **15.** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k$ – ціле число. *1-й спосіб.* Після нескладних перетворень отримаємо рівносильне рівняння $(\sin 2x + \cos x)^2 + 2(1 - \sin x) = 0$, з якого знаходимо $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k$ – ціле число. *2-й спосіб.* Після заміни косинуса на синус прийдемо до рівняння $4\sin^4 x - 4\sin^3 x - 3\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0,$ яке рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x = t, \\ 4t^4 + 4t^3 - 3t^2 - 2t - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t, \\ (t-1)\left((t+1)(2t+1)^2 + 2\right) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $t \in [-1; 1]$, то з рівняння $\sin x = 1$ знаходимо розв'язки вихідного рівняння. **16.** Поділимо першу рівність на xy, а другу – на yz і отримані рівності додамо. Після виконання перетворень матимемо $(x+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) = 0$.

Нескладно переконатися, що перший множник не може дорівнювати нулю. Тому $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$. Звідси $(x+y)z = xy$. Далі маємо

$$x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = yz + xz = (x+y)z = xy.$$

17. До кожного множника добутку в лівій частині нерівності застосуємо співвідношення між середнім арифметичним та середнім геометричним і виконаємо перетворення.

$$(k_1+1)(k_2+2)\dots(k_{2007}+2007) \geq 2\sqrt{k_1\cdot 1}\cdot 2\sqrt{k_2\cdot 2}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{k_{2007}\cdot 2007} =$$
$$= 2^{2007}\sqrt{(k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_{2007})(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2007)} = 2^{2007}\cdot 2007!.$$

18. Оскільки $20 \equiv 2(\bmod 3), -20 \equiv 1(\bmod 3)$, то числа $n, n-20$ та $n+20$ мають різні остачі при діленні на 3. Але тоді найменше з них може дорівнювати тільки числу 3 – інакше хоч одне з них не буде простим. Отже, $n-20=3$. Звідси $n=23$. Тоді $n+2006=2029$. Неважко переконатися, що 2029 – просте число.

19. $\dfrac{\pi}{4}$. Нехай I – даний інтеграл. Виконаємо заміну $x=\dfrac{\pi}{2}-t$. Тоді $dx=-dt, t=\dfrac{\pi}{2}-x$; $t=\dfrac{\pi}{2}$, якщо $x=0$, і $t=0$, якщо $x=\dfrac{\pi}{2}$. Маємо:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)}{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2007}t\,dt}{\cos^{2007}t+\sin^{2007}t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2007}x\,dx}{\cos^{2007}x+\sin^{2007}x}.$$

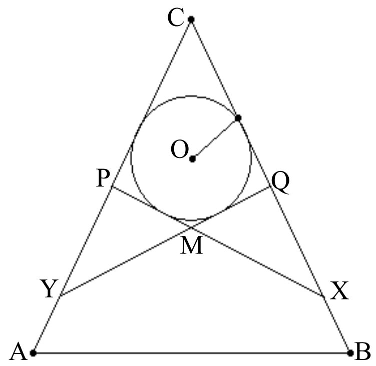
Додамо заданий і отриманий інтеграли.

$$I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2007}x\,dx}{\sin^{2007}x+\cos^{2007}x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2007}x\,dx}{\cos^{2007}x+\sin^{2007}x}=$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2007}x+\cos^{2007}x}{\cos^{2007}x+\sin^{2007}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Звідси знаходимо $I=\dfrac{\pi}{4}$. **20.** *Ні, не існує. 1-й спосіб.* Припустимо, що така функція існує. Нехай x, y – дійсні числа, для яких виконується рівність $f(x)=f(y)$. Тоді $x^{2007}=f(f(x))=f(f(y))=y^{2007}$, а тому $x=y$. За умов, що $x=1$ і $x=0$ з першої і другої рівностей отримаємо $f(f(1)+1)=0$ і $f(f(0))=0$ відповідно. Звідси $f(f(1)+1)=f(f(0))$, а $f(1)+1=f(0)$. Якщо $x=f(0)$, то з першої рівності матимемо $f(1)=2-2f(0)$. Тому $f(1)=0, f(0)=1$. Далі згідно з першою рівністю маємо $f(2)=f(1+1)=f(1+f(0))=2-2\cdot 0=2$, а згідно з другою, враховуючи що $f(2)=2$, маємо $f(2)=f(f(2))=2^{2007}$. Отримана суперечність спростовує припущення. *2-й спосіб.* Нехай a дійсне число, для якого $a^{2007}=2-2a$. (Нескладно, використовуючи графіки функцій $y=x^{2007}$ і $y=2-2x$, переконатися, що таке число існує). Тоді $f(f(a))=f(1+f(a))$, а тому, згідно з раніше доведеним, $f(a)=1+f(a)$. Отримали суперечність. Отже, припущення неправильне. **21.** Нехай X і Y точки, в яких серединні перпендикуляри перетинають сторони BC і AC трикутника (мал. 113). Трикутники CPX і CQY подібні. Нехай k – коефіцієнт подібності, p_1 і p_2 – периметри, S_1 і S_2 – площі трикутників AQC і BPC відповідно. Тоді $\frac{p_1}{p_2}=k, \frac{S_1}{S_2}=k^2$. Якщо r – радіус вписаного кола, то $S_1=\frac{p_1 r}{2}, S_2=\frac{p_2 r}{2}$. Звідси

$$\frac{S_1}{p_1}=\frac{S_2}{p_2} \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{p_1}{p_2} \Rightarrow k^2=k \Rightarrow k=1,$$

тобто трикутники CPX і CQY рівні. Тому $CP=CQ$, а отже, $AC=CB$. Випадок, коли серединні перпендикуляри перетинають продовження сторін, розглядається аналогічно.



Мал. 113

2007 – 2008 навчальний рік

VII КЛАС

1. $9:9+9-9+9=10$. **2.** *На 30%.* **3.** Якби в лісі не було сосен з однаковою кількістю голок, то в лісі було б не більше 600001 сосен. Оскільки в лісі їх 900000, то частина з них обов'язково має однакову кількість голок. **4.** $65\frac{5}{11}$ *хв.* Швидкість руху хвилинної стрілки складає $\frac{1}{60}$ обороту за хвилину, а годинникової – $\frac{1}{12\cdot 60}$ обороту за хвилину. Через годину хвилинна стрілка збігається з позначкою 12 на циферблаті, а годинна – з позначкою 13. Якщо за t хвилин хвилинна стрілка дожене годинникову, то буде виконуватися рівність

$$\frac{1}{60}t = 5 + \frac{1}{12\cdot 60}t \Rightarrow t = 5\frac{5}{11}.$$

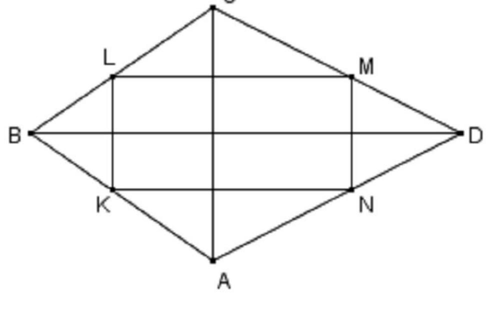
Отже, хвилинна стрілка дожене годинникову через $65\frac{5}{11}$ хв. **5.** З другого ребуса випливає , що $B=1$, бо $\grave{A}\acute{A}\hat{A}\times\hat{A}=\grave{A}\acute{A}\hat{A}$. Тоді з першого – $\acute{A}=2$ і $\grave{A}=3$, бо $\hat{A}+\hat{A}=\acute{A}$ і $\acute{A}+\hat{A}=\grave{A}$. Насамкінець, знаючи, що $321\cdot 11=3531$, знаходимо $\tilde{A}=5$. **6.** Позначимо кількість столів з 4 шухлядами через x, тоді з трьома шухлядами буде $16-x$ столів. З рівняння: $4x+3(16-x)=57$ знаходимо $x=9$. Отже, в кімнаті 9 столів з чотирьом шухлядами і 7 – з трьома. **7.** Карлсон може переламати одну з паличок навпіл – це буде пара вертикальних сторін прямокутника. З 99 паличок, що залишилися, треба скласти відрізок та поділити його навпіл (якщо потрібно, переламати ще одну паличку). **8.** 50 *кг.* Якщо огірки містять 99% води, то сухої речовини в них 1%, тобто 1 кг. Коли привезли їх на ринок, то ця суха маса становила вже 2%, отже, їхня загальна маса стала $1:0{,}02=50$ (кг). **9.** *Ні, не зможе*. Кожного разу кількість голів Змія Горинича змінюватиметься на число, кратне 3. **10.** Різниця двох чисел буде ділитися на число 2007 без остачі, якщо ці числа при діленні на 2007 мають однакові остачі. Оскільки при діленні різних чисел на 2007 можна отримати 2007 різних остач, то при діленні 2008 чисел остач буде 2008, а тому принаймні дві з них співпадатимуть. Різниця цих чисел буде ділитися на 2007.

VIII КЛАС

1. Позначимо через n – кількість учнів у класі, s – сумарний ріст усіх учнів класу, крім найвищого учня, S – сумарний ріст усіх учнів класу, крім найнижчого. Тоді маємо дві рівності: $\frac{s}{n-1}=148\frac{3}{7}$ і $\frac{S}{n-1}=149\frac{4}{7}$, які запишемо так: $4s=595(n-1)$ і $7S=1047(n-1)$. Оскільки числа 4 і 595, 7 і 1047 взаємно прості, то з першої рівності випливає, що число $n-1$ кратне 4, а з другої випливає, що це число кратне 7. Водночас числа 4 і 7 також взаємно прості. Тому число $n-1$ повинно бути кратним 28. Враховуючи, що $n\le 40$, маємо $n-1=28$, а $n=29$. **2.** Пронумеруємо клітинки таблиці, як показано на малюнку 114.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

Мал. 114



Мал. 115

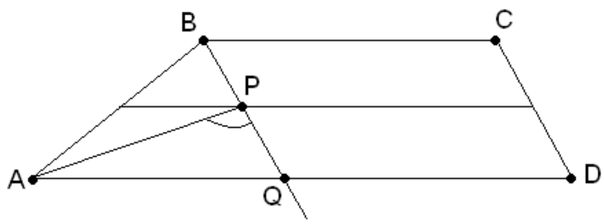
Клітинки з однаковими номерами утворюють пари. Другому гравцеві для перемоги досить кожного разу зафарбовувати клітинку з тої пари, клітинку з якої за останнім своїм ходом зафарбував гравець, що розпочав гру. Дотримуючись такої стратегії гри, другий гравець лише повторюватиме на одній з половин таблиці конфігурацію зафарбованих кліток, яка утворюється після ходу першого гравця. Тому зафарбований квадрат 2×2 вперше з'явиться після ходу гравця, що почав гру. **3.** Нескладно довести, що діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні (мал. 115), а сторони чотирикурника $KLMN$ паралельні цим діагоналям: KL і MN паралельні AC, KN і LM паралельні BD. Тому $KLMN$ – прямокутник, а KM і ML – його діагоналі. Відомо, що прямокутник має рівні діагоналі, а отже, $KN = LM$. **4.** $x = 3, y = 1$. Дане рівняння рівносильне наступному:

$$3(10x + y) - 7(10y + x) = 2 \Leftrightarrow 23x - 67y = 2 \Leftrightarrow x = 3y - \frac{2(y-1)}{23} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 1, x = 3.$$

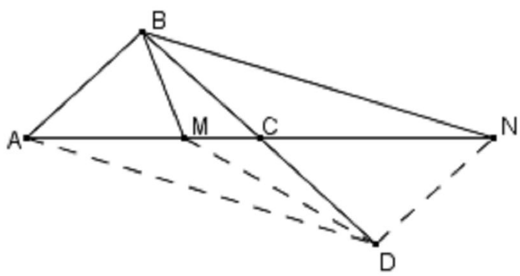
5. Якщо n – кількість зіграних партій, то задача зводиться до розв'язування рівняння $(0{,}1n + 8) + (0{,}1(n - 0{,}1 - 8) + 1 + 8) = n$. Звідси $n = 20$. **6.** Якщо задумане число більше за 4, то числа будуть зменшуватись, а якщо менше за 4 – то збільшуватись, у результаті задуманого числа отримано не буде. Отже, учень задумав число 4. **7.** Позначимо маси чотирьох мішків a, b, c і d відповідно. Тоді

$$\begin{cases} a + b + c \geq 60, \\ a + b + d \leq 50, \\ a + c + d \leq 40, \\ b + c + d \leq 30. \end{cases}$$

Віднімемо від першої нерівності по черзі другу, третю і четверту нерівності. Отримаємо: $c - d \geq 10$, $b - d \geq 20$, $a - d \geq 30$. Звідси: $c \geq 10$, $b \geq 20$, $a \geq 30$, $a + b \geq 50$. Тому $d = 0, a = 30, b = 20, c = 10$. **8.** З рівностей $\angle ABQ = \angle CBQ = = \angle AQB$ випливає, що ABQ рівнобедрений (мал. 116). Оскільки P лежить на середній лінії, то $BP = PQ$. Отже, $\angle APQ = 90°$.



Мал. 116



Мал. 117

9. Нехай x – кількість кг сіна, y – кількість кг силосу. Тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0.42x + 0.2y = 6, \\ 0.85x + 0.27y = 9, \end{cases}$$

з якої визначаємо $x = \dfrac{900}{283}$, $y = \dfrac{6600}{283}$. **10.** Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ з раціональними коефіцієнтами матиме два різних раціональних корені, якщо його дискримінант буде квадратом натурального числа, відмінного від 0. Для цього достатньо, щоб сума коефіцієнтів тричлена дорівнювала 0:

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow b = -a - c \Rightarrow b^2 - 4ac = (a - c)^2,$$

і старший коефіцієнт не дорівнював вільному члену: $a \neq c$. Тому для перемоги першому достатньо назвати числа 1, 2, -3.

IX КЛАС

1. Побудуємо точку D так, щоб чотирикутник $ABND$ був паралелограмом (мал. 117). За будь-якого розміщення точки M на відрізку AC кут AMD є найбільшим кутом трикутника AMD, а тому AD – найбільша сторона цього трикутника. Далі маємо:

$$BM + BN = BM + AD > BM + MD > BD = 2BC = AB + BC \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BM + BN > AB + BC.$$

2. *131 грн.* Насамперед зазначимо, що перепродаж куплених предметів принесла 89 гривень прибутку. Якщо x – вартість другого предмета, то дістаємо рівняння

$$0,25(225 - x) + 0,5x = 89 \Rightarrow 131.$$

3. Після рівносильних перетворень отримуємо рівняння:

$$\left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 1, \\ x - \sqrt{x^2 - 3x + 1} = -1, \end{array}\right. \Rightarrow x = 0.$$

4. Спочатку Оксанці треба утворити пари $(*n * n^3)$, $(*n^2 * n^4)$, $(*n^5 * n^7)$, $(*n^6 * n^8)$. Потім, відповідаючи на хід Петрика, замінити “зірочку” в тій парі, в якій щойно замінив Петрик, але треба ставити знак протилежний знаку, який поставив Петрик. Оскільки $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, то кожна “пара” при будь-якому натуральному n ділиться на 6, а тому й весь вираз буде ділитися на 6. **5.** *Ні, не може*. Число 2007^{2008} закінчується цифрою 1, бо $2007^{2008} = (2007^4)^{502}$, число 2008^{2007} закінчується цифрою 2, бо $2008^{2007} = (2008^4)^{501} \cdot 2008^3$. Тому сума степенів закінчується цифрою 3, а квадрат жодного цілого числа не може закінчуватися цифрою 3. **6.** 0, 1, … . Використаємо рівність $[a + n] = [a] + n$ де a – довільне число, n – ціле число. Прийдемо до рівняння $9[x] = \left|x + \left|x + ... + \left|x + |x|\right|...\right|\right|$. Звідси $[x] \geq 0$, отже $x \geq 0$, і знак модуля можна розкрити. Отримуємо рівняння $[x]=x$, розв'язком якого є кожне невід'ємне ціле число. **7.** $c^2=a^2+b^2=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a-b)^2}{2}\geq\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow c\geq\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

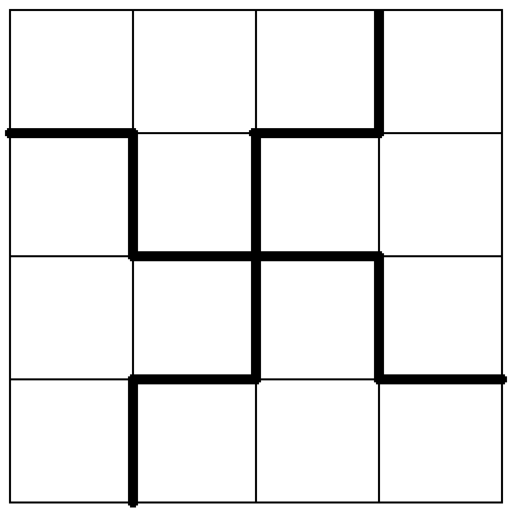
8. Нехай f – шукана функція. Тоді для довільного x і $y=f(x)$ виконуватиметься рівність $f(0)=-f^2(x)+x^4$. Якщо $x=0$, то $f(0)=-f^2(0)$. Тому $f(0)=0$, а $f(x)=x^2$ – єдина шукана функція. **9.** Розфарбуємо дошку в шаховому порядку. Тоді Т-тетраміно може накрити або одну білу та 3 чорних клітини, або одну чорну та 3 білих клітини. Нехай тетраміно першого виду x штук, а другого – y. Розглянемо 2 випадки. Нехай n непарне. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що на дошці $\frac{n^2-1}{2}$ білих та $\frac{n^2+1}{2}$ чорних клітинок. Тоді

$$\begin{cases}3x+y=\frac{n^2+1}{2},\\ x+3y=\frac{n^2-1}{2}.\end{cases}$$

Звідси $8y=n^2-2$, що неможливо, бо n^2-2 – непарне число. Для парного n маємо:

$$\begin{cases}3x+y=\frac{n^2}{2},\\ x+3y=\frac{n^2}{2},\end{cases}\Rightarrow 8y=n^2\Rightarrow n=4k, k\in\mathbf{N}.$$

Отже, дошки $4k\times 4k$ можна розбити на Т-тетраміно, бо вони поділяються на квадрати 4×4, які можна розбити так, як показано на мал. 118.



Мал. 118

10. *Ні, не можуть.* Пронумеруємо всі дерева по колу числами від 1 до 44 і знайдемо суму номерів. Вона дорівнює 990. Нескладно переконатися, що після перельоту горобців ця сума або не змінюється, або змінюється на 44. Це означає, що остача від ділення суми номерів дерев, на яких сидять горобці, не залежить від того, як вони перелітають з дерева на дерево, і дорівнює 22. Якби всі горобці злетілися на одне дерево, то остача б дорівнювала 0, чого бути не може.

X КЛАС

1. $a>1$**.** По-перше, корені повинні існувати. Це буде за умови, що дискримінант квадратного тричлена невід'ємний:

$$a^2-4(a-1)\ge 0 \Leftrightarrow (a-2)^2\ge 0.$$

По-друге, вільний член квадратного тричлена повинний бути додатним: $a-1>0$. З наведених умов визначаємо шукані значення параметра a: $a>1$. **2.** 335, 742. Нехай n – шукане число. Тоді $n=37k+2$ і $n=11m+5$, де $k,m\in N$. Порівнюючи праві частини цих рівностей, дістанемо рівняння $37k+2=11m+5$. Розв'яжемо його відносно m:

$$m=3k+\frac{4k-3}{11}.$$

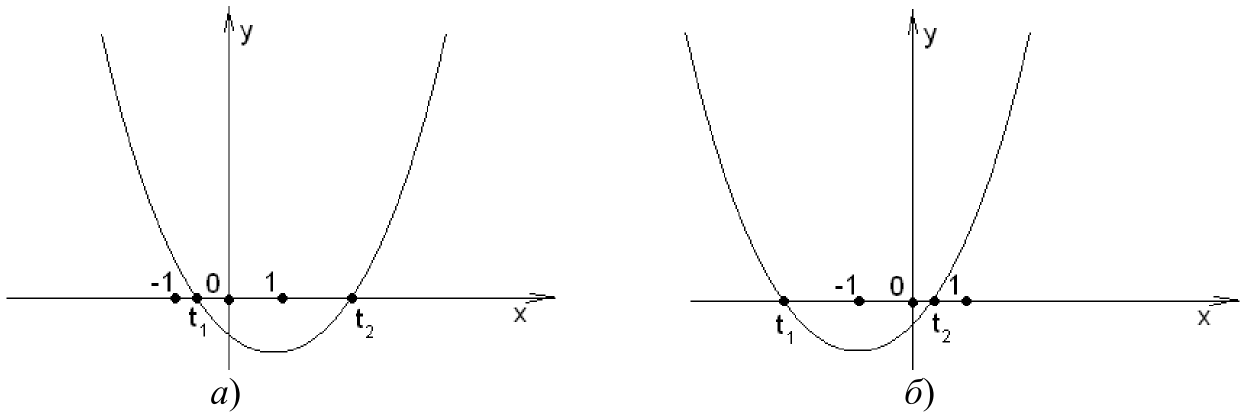
Звідси випливає, що

$$4k-3=11p \Leftrightarrow k=3p+1-\frac{p+1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p+1=4q \Leftrightarrow p=4q-1 \Rightarrow k=11q-2 \Rightarrow n=407q-72,\, q\in Z.$$

Отже, всі числа, які володіють обумовленими в задачі властивостями, записуються так: $n=407q-72, q\in Z$. Однак тільки при $q=1$ і $q=2$ число n буде трицифровим: 335 і 742. **3.** Виграє другий гравець, якщо відповідаючи на хід суперника, кластиме сірники в ту коробку, в яку щойно поклав сірники перший гравець. **4.** За 1 годину восьмигодинного робочого дня робітник виконував $\frac{1}{8}$ частину норми, що приймемо за 100%. За 1 годину семигодинного робочого дня він вже виконував $\frac{1}{7}$ частину норми, що складає $\frac{800}{7}$%. Продуктивність роботи зросла на $\frac{100}{7}$%. Це підвищення продуктивності зберегло розмір заробітної плати. Для підвищення заробітної плати на 5% продуктивність праці треба підвищити на 15%. **5.** Сторони трикутника є хордами кола, описаного навколо цього трикутника. Їхня відстань від центра описаного кола дорівнює радіусу вписаного кола. Хорди кола, відстань яких від центра кола однакова, рівні. Тому сторони трикутника рівні – трикутник правильний. **6.** Використаємо рівність $[a+n]=[a]+n$ де a – довільне число, n – ціле число. Прийдемо до рівняння $11[x]=\left|x+\left|x+...+\left|x+|x|\right|...\right|\right|$. Звідси $[x]\ge 0$, отже $x\ge 0$, і знак модуля можна розкрити. Отримуємо рівняння $11[x]=12x$.

Оскільки $12x = 11[x] \le 11x \le 12x$, то рівність $11[x] = 12x$ можлива тільки за умови, що $x = 0$. **7.** За теоремою Вієта розв'язком цієї системи є корені квадратного рівняння $t^2 - 2(a+1)t + 3a + 1 = 0$, тобто $x = t_1$, $y = t_2$ чи навпаки. Умова $|x|<1$, $|y|>1$ виконується, коли один з коренів квадратного рівняння належить інтервалу $(-1;1)$, а інший лежить поза ним. Позначимо $f(x) = t^2 - 2(a+1)t + 3a + 1$. Умова задачі виконуватиметься в тому випадку, коли графік функції буде розташований так, як показано на малюнках:



Мал. 119

Ці розташування можна аналітично описати нерівністю $f(-1)f(1) < 0$, де $f(-1) = 5a + 4$, $f(1) = a$. Далі з нерівності $(5a+4)a < 0$ знаходимо $a \in \left(-\frac{4}{5}; 0\right)$.

8. $\arccos\frac{5}{8}$. На мал. 120 зображено прямий паралелепіпед $AMBNPCQD$, який моделює ситуацію, дану в умові задачі. $\angle AEM$ – кут між мимобіжними прямими AB і CD. За умовою $\cos\angle AEM = \frac{\sqrt{35}}{10}$, $AE = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5} = BE$, $ME = \frac{1}{2}CD = \sqrt{7}$. З трикутників AEM і BEM за теоремою косинусів маємо рівності відповідно:

$$AM^2 = AE^2 + ME^2 - 2AE \cdot ME \cdot \frac{\sqrt{35}}{10} = 5 + 7 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{35}}{10} = 5,$$

$$BM^2 = BE^2 + ME^2 - 2BE \cdot ME \cdot \left(-\frac{\sqrt{35}}{10}\right) = 5 + 7 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{35}}{10} = 19,$$

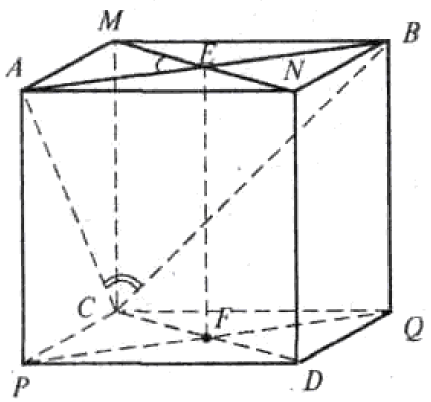
$$MC = EF = \sqrt{13}.$$

З прямокутних трикутників AMC і BMC за теоремою Піфагора маємо:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 = 5 + 13 = 18, BC^2 = BM^2 + MC^2 = 19 + 13 = 32.$$

Насамкінець з трикутника ABC за теоремою косинусів обчислюємо

$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{18 + 32 - 20}{2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{32}} = \frac{5}{8}.$$

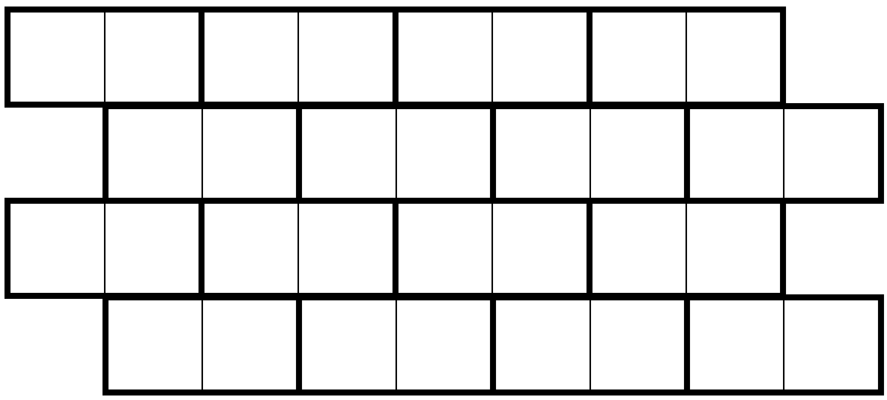


Мал. 120

9. Нехай в класі x хлопчиків та y дівчаток. Тоді сумарний зріст всіх хлопчиків дорівнює $S_1 = 155x$, а сумарний зріст всіх дівчаток дорівнює $S_2 = 148y$. Отже, сумарний зріст всіх учнів класу дорівнює $S_1 + S_2 = 155x + 148y$. З іншого боку, сумарний зріст учнів класу дорівнює $28 \times 150 = 4200$ (*см*). Отже, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 28, \\ 155x + 148y = 4200, \end{cases}$$

знайдемо, що дівчаток 20. **10.** Другому потрібно умовно розбити аркуш на прямокутники, як показано на мал. 121, і коли перший ставить 1 в одну клітинку



Мал. 121

прямокутника, ставити 0 у вільну клітину цього прямокутника. Так він завадить першому досягти перемоги.

XI КЛАС

1. З нерівності $2(x+y+z)^2+3(x^2+y^2+z^2)\geq 0$, яка рівносильна даній нерівності, випливає, що єдиним розв'язком є трійка чисел: 0, 0, 0. **2.** Нехай α і β – гострі кути трикутника, x і y – відповідні протилежні катети. З рівностей $S=\frac{1}{2}cy\sin\alpha, S=\frac{1}{2}cx\sin\beta, S=\frac{1}{2}xy$ знаходимо $\sin\alpha=\frac{2S}{cy}, \sin\beta=\frac{2S}{cx}, xy=2S.$ Тоді

$$m=\sin\alpha+\sin\beta=\frac{2S}{cy}+\frac{2S}{cx}=\frac{2S}{c}\cdot\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y=cm\Rightarrow x^2+y^2+2xy=c^2m^2\Rightarrow c^2+4S=c^2m^2\Leftrightarrow S=\frac{(m^2-1)c^2}{4}.$$

Оскільки $m=\sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha+\cos\alpha$, то

$$m^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin 2\alpha>1 \text{ для } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Тому задача має розв'язок $S=\frac{(m^2-1)c^2}{4}$ для $m>1$. **3.** Квадратний тричлен ax^2+bx+c з раціональними коефіцієнтами матиме два різні раціональні корені, якщо його дискримінант буде квадратом раціонального числа, відмінного від 0. Для цього досить, щоб сума коефіцієнтів тричлена дорівнювала нулю:

$$a+b+c=0\Leftrightarrow b=-a-c\Leftrightarrow b^2=a^2+2ac+c^2\Leftrightarrow b^2-4ac=(a-c)^2$$

і старший коефіцієнт не дорівнював вільному члену: $a\neq c$. Тому для перемоги першому гравцеві достатньо назвати числа –3, 1, 2. **4.** Якщо n і k – непарні числа і їхня сума ділиться на 15, то сума $n+k$ закінчується цифрою 0. Тому n^3+k^3 також закінчується цифрою 0, бо $n^3+k^3=(n+k)(n^2-nk+k^2)$. **5.** Віднімемо від першого рівняння друге і, виконавши тотожні перетворення, отримаємо рівняння

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-2x-2y+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0,\\ x^2+xy+y^2-2x-2y+2=0.\end{array}\right.$$

Якщо $x=y$, то рівняння системи перетворюються в рівняння $x^2=x^3-3x^2+2x$, яке має три корені $0, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$, що визначають три розв'язки системи: $(0;0)$, $(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. З системи рівнянь:

$$\begin{cases}y^2=x(x-1)(x-2),\\ x^2=y(y-1)(y-2),\end{cases}$$

яка рівносильна даній системі, випливає така система нерівностей:

$$\begin{cases}x(x-1)(x-2)\geq 0,\\ y(y-1)(y-2)\geq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[0;1]\cup[2,+\infty),\\ y\in[0;1]\cup[2,+\infty).\end{cases}$$

Оскільки для всіх $x\geq 0$ і $y\geq 0$ виконується нерівність

$$x^2+xy+y^2-2x-2y+2=(x-1)^2+(y-1)^2+xy>0,$$

то друге рівняння сукупності розв'язків не має.

Відповідь: $(0;0)$, $(2-\sqrt{2},2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$.

6. Використаємо рівність $[a+n]=[a]+n$ де a – довільне число, n – ціле число. Прийдемо до рівняння $12[x]=\left|x+\left|x+...+\left|x+|x|\right|...\right|\right|$. Звідси $[x]\geq 0$, отже $x\geq 0$, і знак модуля можна розкрити. Отримуємо рівняння $12[x]=11x$, яке рівносильне наступній мішаній системі:

$$\begin{cases}[x]=k,\\ k\leq x<k+1,\\ 12k=11x,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{12k}{11},\\ k\leq\dfrac{12k}{11}<k+1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{12k}{11},\\ 11k\leq 12k,\\ 12k<11k+11,\end{cases}\Rightarrow x=\frac{12k}{11},\ k=0,1,...,10.$$

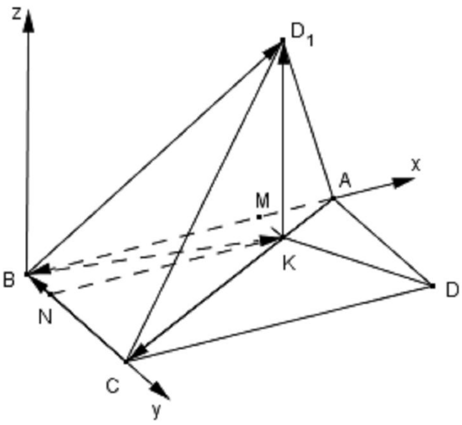
7. $\arccos\dfrac{\left|b^2-a^2\right|}{\sqrt{a^4+b^4}}$. *1-й спосіб.* Помістимо прямокутник у просторову систему координат $Oxyz$ так, щоб вершина B збіглася з початком координат, а вершини A і C лежали на координатних осях Ox та Oy відповідно (мал. 122). Нехай точка K – основа перпендикуляра, опущеного з вершини D на діагональ AC. Після того, як прямокутник $ABCD$ зігнули по діагоналі AC, дістали піраміду D_1ABC. Якщо θ – шуканий кут, то

$$\cos\theta=\frac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1})}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}.$$

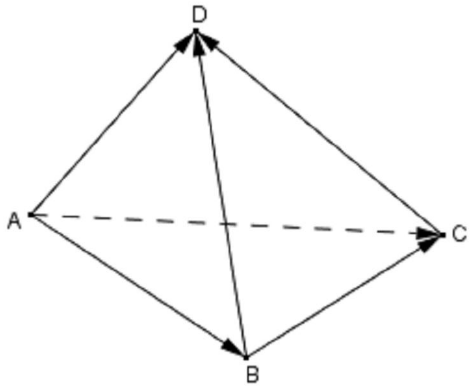
Зрозуміло, що $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\left(\overline{a,-b,0}\right)$. Визначимо координати $\overrightarrow{BD_1}$. Позначимо через u і v координати точки K. Спочатку, використовуючи подібність трикутників AD_1C і AKD_1, знаходимо $AK=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $D_1K=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а потім, зважаючи на подібність трикутників AMK і ABC, визначаємо u: $u=\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$. Аналогічними міркуваннями приходимо до рівності $v=\dfrac{b^3}{a^2+b^2}$. З рівності $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KD_1}$ установлюємо координати $\overrightarrow{BD_1}$:

$$\overrightarrow{BD_1}=\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\frac{b^3}{a^2+b^2},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Після нескладних очевидних перетворень дістаємо $\cos\theta=\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$.



Мал. 122



Мал. 123

2-й спосіб. Цього разу скористаємося рівністю

$$(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2) = 2AC \cdot BD\cos\theta, \qquad (*)$$

яку доведемо, використовуючи вектори (мал. 123). Нехай $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|, CD = \left|\overrightarrow{CD}\right|, AD = \left|\overrightarrow{AD}\right|,\ BC = \left|\overrightarrow{BC}\right|, AC = \left|\overrightarrow{AC}\right|, BD = \left|\overrightarrow{BD}\right|$. Тоді

$$(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2) =$$

$$= \left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2\right) - \left(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2\right) = \left(\overrightarrow{AB}^2 + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right) - \left(\overrightarrow{AD}^2 + \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2\right) =$$

$$= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2BD \cdot AC \cdot \cos\theta.$$

Адаптовуючи доведену рівність до заданої задачі, маємо

$$\cos\theta = \frac{(AB^2 + CD_1^2) - (AD_1^2 - BC^2)}{2AC \cdot BD} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)BD_1}.$$

З $\Delta\ BAD_1$ за теоремою косинусів отримуємо:

$$BD_1^2 = AB^2 + AD_1^2 - 2AB \cdot AD_1 \cos\angle BAD_1 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle BAD_1.$$

Для визначення $\cos\angle BAD_1$ використаємо першу теорему косинусів для тригранного кута (див. [16]).

Теорема. *Якщо* α, β, γ *– плоскі кути тригранного кута,* A *– двогранний кут, протилежний куту* α*, то має місце рівність*

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A. \qquad (**)$$

У тригранному куті з вершиною A (мал. 122) двогранний кут з ребром AC – прямий, тому рівність $(**)$ запишеться так: $\cos\angle BAD_1 = \cos\angle CAD_1 \cdot \cos\angle BAC$.

Далі знаходимо: $\cos\angle BAD_1 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{ab}{a^2 + b^2},\ BD_1^2 = \dfrac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}$.

Насамкінець дістаємо

$$\cos\theta = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\dfrac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} \Rightarrow \quad \theta = \arccos\frac{\left|b^2 - a^2\right|}{\sqrt{a^4 + b^4}}.$$

Зауважимо, що рівність ($*$) залишається правильною і для випадку, коли точки A, B, C, D лежать в одній площині. **8.** $a \in (-\infty, 2]$. Використовуючи формулу для косинуса подвійного кута, запишемо нерівність так:

$$\cos^2 x + a\cos x + 2a - 7 < 0.$$

Після заміни $\cos x = t$ дістанемо рівносильну задачу: при яких значеннях a нерівність $t^2 + at + 2a - 7 < 0$ виконується в інтервалі $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$? Введемо функцію $f(t) = t^2 + at + 2a - 7$ і розв'яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} f(0{,}5) < 0, \\ f(1) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a - 27 < 0, \\ 3a - 6 < 0, \end{cases} \Rightarrow a < 2.$$

Якщо $a = 2$, то $f(t) = t^2 + 2t - 3 < 0$ для $t \in (-3; 1)$, а $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \subset (-3; 1)$.

9. Проведемо через пряму *AB* площину, що паралельна прямій *CD* (мал. 124). Нехай *C′* і *D′* – проекції точок *C* і *D* на цю площину. Покажемо, що пряма *AB* ділить відрізок *C′D′* навпіл. Дійсно, проекція тетраедра *ABCD* на площину, перпендикулярну прямій *AB*, є рівнобедреним трикутником *CKD*, оскільки дві його сторони *CK* і *DK* дорівнюють висотам рівновеликих трикутників *ACB* і *ADB*. Рівні похилі *KC* і *KD* мають рівні проекції KC' і KD'. Аналогічно доводиться, що пряма *CD* ділить навпіл проекцію ребра *AB* на площину, що проходить через пряму *CD* паралельно прямій *AB*. Таким чином, *AC′BD′* – паралелограм. З рівності *BC′* = *AD′* випливає рівність *BC* = *AD*. Рівності довжин інших пар протилежних ребер доводиться аналогічно. **10.** Припустимо, що f – шукана функція. Тоді для $x = y = 0$ маємо $f(-f(0)) = f(0)$. Якщо $y = 0$, а $x = f(0)$, то

$$f(0) = f(-f(0)) + f^2(0).$$

З цих рівностей маємо $f(0) = 0$. Нехай y – довільне дійсне число, а $x = \dfrac{f(y) + y^{2008}}{2}$. Тоді задана рівність перетвориться в рівність

$$f(y)\left(f(y) + y^{2008}\right) = 0,$$

яка виконується для кожного y. Оскільки рівняння $f(y) = 0$ має тільки один розв'язок, то це можливо тільки за умови, що $f(y) = -y^{2008}$. Таким чином, тільки функція $f(x) = -x^{2008}$ може задовольняти задану рівність. Зробимо перевірку:

$$f\left(x + y^{2008}\right) = f\left(y^{2008} - x\right) + xf(y),$$

$$-\left(x + y^{2008}\right)^{2008} = -\left(y^{2008} - x\right)^{2008} - xy^{2008}.$$

Ці рівності повинні виконуватися для всіх x і y, зокрема для $x = y = 1$. Однак для $x = y = 1$ рівність не виконується, бо $2^{2008} \neq 1$. Отже, функції, що задовольняє умови задачі, не існує.

ДОДАТОК

У додатку містяться твердження, використані при розв'язуванні задач, вивчення яких у загальноосвітніх навчальних закладах не передбачене Програмою з математики.

Метод математичної індукції. Цей метод ґрунтується на принципі математичної індукції: «*Твердження $A(n)$, залежне від натурального параметра n, вважається доведеним для всіх натуральних n, якщо воно доведене для $n=1$ (база індукції) і з припущення про виконання твердження $A(n)$ для будь-якого натурального $k>1$ доведено (крок індукції), що справджується твердження $A(k+1)$*».

Принцип Діріхле. *У кожній сукупності множин, де загальна кількість елементів перевищує кількість множин, є принаймні одна множина, в якій міститься не менше двох елементів.*

Часто принцип Діріхле формулюють на мові «предметів-ящиків»: *якщо в n ящиках лежать k предметів і $k>n$, то принаймні в одному ящику є не менше двох предметів*; та на мові «кліток-кролів»: *якщо в n клітках кількість кролів більша за nk, то принаймні в одній клітці кролів більше, ніж k.*

Геометричним узагальненням принципу Діріхле є таке твердження: *якщо сума площ кількох фігур менша числа S, то ними не можна покрити фігурі, площа якої дорівнює S.*

Теорема Менелая. *Якщо пряма перетинає сторони AC, BC, AB трикутника ABC в точках A_1, B_1, C_1, то має місце співвідношення*

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{BC_1}{C_1A}.$$

Ортоцентр трикутника – *точка перетину його висот.* Точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно його сторін, лежать на колі, описаному навколо трикутника.

Основні базові нерівності:

нерівність Коші (*співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним*)

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt{a_1a_2...a_n},$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – невід'ємні дійсні числа; знак рівності має місце тоді й тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = ... = a_n$;

нерівність Коші–Буняковського

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

де $a_k, b_k, k=1,...,n,$ – довільні дійсні числа; знак рівності має місце тоді й тільки тоді, коли $a_k=\lambda b_k, k=1,...,n;$

нерівність трикутника

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2},$$

де $a_k, b_k, k=1,...,n,$ – довільні дійсні числа; знак рівності має місце тоді й тільки тоді, коли $a_k=\lambda^2 b_k, k=1,...,n$.

Своєрідними аналогами нерівності Коші для двох чисел і нерівності Коші-Буняковського ля довільної кількості пар додатних чисел є нерівності:

$$\frac{a^2}{b}\ge 2a-b, \qquad \frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}.$$

Ціла й дробова частини числа. *Цілою частиною числа* a (*її позначають символом* $[a]$) *називається найбільше ціле число, яке не перевищує його, тобто*

$$[a]=k,\ \textit{якщо}\ k\le a<k+1,\ \textit{де}\ k-\textit{ціле число}.$$

Дробовою частиною числа a (*її позначають символом* $\{a\}$) *називається різницю між числом і його цілою частиною*:

$$\{a\}=a-[a].$$

Основні властивості:

1) $a=[a]+\{a\}$;
2) $[a+n]=[a]+n$ *для будь-яких* $a\in R, n\in Z$;
3) $\{a+n\}=\{a\}$ *для будь-яких* $a\in R, n\in Z$;
4) $[-a]=\begin{cases}-[a], \textit{ якщо } a\in Z,\\ -[a]-1, \textit{ якщо } a\notin Z;\end{cases}$
5) $\{-a\}=\begin{cases}0, \textit{ якщо } a\in Z,\\ 1-\{a\}, \textit{ якщо } a\notin Z;\end{cases}$
6) $[a]\le a<[a]+1$; 7) $0\le\{a\}<1$; 8) $[a+b]\ge[a]+[b]$.
9) $[x]\le a \Leftrightarrow x<[a]+1$; 10) $[x]>a \Leftrightarrow x\ge[a]+1$.

ВИКОРИСТАНА І РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Апостолова Г., Панкратова І., Фількенштейн Л.* Ціла та дробова частини числа. – К.: Факт, 1996 – 97 с.
2. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965. – 165 с.
3. *Борисова В.* XLIV Всеукраїнська олімпіада юних математиків (третій етап) // Математика в школі. – 2004ю – №3. С. 25 – 27.
4. *Буник І.* Теорема Менелая //. – №15 (315). С. 17 – 21.
5. *Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й.* Київські математичні олімпіади. 1984 – 1993 рр. – К.: Либідь, 1993. – 143 с.
6. *Вишенський В.А., Ганюшкін О. Г., Карташов М.В., Михайловський В.І.* та ін. Українські математичні олімпіади. – К.: Вища школа, 1993. – 488 с.
7. *Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И.* Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Вища школа, 1984. – 237 с.
8. *Вороний О.М.* Кіровоградські олімпіади юних математиків. Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2000. – 140 с.
9. *Вороний О.М.* Готуємось до олімпіади з математики. – Харків, Вид. група «Основа», 2008. – 255 с.
10. *Гальперин Г.А., Толпыго А.К.* Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.
11. *Добросевич М.Ф., Лейфура В.М., Мітельман І.М. та ін.* Третій етап 41-ї Всеукраїнської олімпіади юних математиків // У світі математики. – 2001. Т. 7, вип.. 1. С. 65 – 71.
12. *Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В.* Обласні математичні олімпіади. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2005. – 344 с.
13. *Кушнір І.А.* Трикутник в задачах. К.: Либідь. 1994. – 104 с.
14. *Лейфура В.М.* Математичні задачі евристичного характеру. – К.: Вища шк., 1992. – 91 с.
15. *Маланюк М.П., Лукавецький В.І.* Олімпіади юних математиків. – К.: Рад. шк., 1977. – 102 с.
16. *Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. – Москва. Наука, 1989. – 288 с.
17. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – Житомир: ЖДПУ, 2002. – 298 с.
18. *Федак І.В.* Обласні олімпіади з математики 1987 – 2005 рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. – 164 с.
19. *Федак І.В.* Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики (і не тільки їх): Посібник для підготовки до математичних олімпіад. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
20. *Ядренко М.Й.* Принцип Діріхле і його застосування. – К.: Вища шк., 1986. – 80 с.
21. *Ясінський В.А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця: ВДПУ, 1998. – 266 с.

КІРОВОГРАДСЬКІ МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ ШКОЛЯРІВ 2000 – 2008 рр.

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Вороний Олексій Миколайович

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ, ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ

Серія **ДК** № **1537** від **22.10.2003 р.**

Підп. до друку 02.12.2008. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Папір офсет. Друк різограф.
Ум. др. арк. 8,9. Тираж 550. Зам. № 5406.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
Тел.: (0522) 24-59-84.
Fax.: (0522) 24-85-44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua